Ministry of Higher Education and Scientific Research
Southern Technical University
ThiQar Technical College
Department of Accounting Techniques

SUB: QUANTITATIVE TECHNIQUES
CLASS: SECOND (MORNING)

Lecturer
Assist Lect. Emad. F.AL- Shareefi

الاسبوع الاول

A differential equation: is any equation which contains derivatives, either ordinary derivatives or partial derivatives.

المعادلة التفاضلية: أي المعادلة التي تحتوي على مشتقات ، إما عادية أو مشتقات المشتقات الجزئية

$$F = ma \qquad a = \frac{dv}{dt} \quad \text{OR} \quad a = \frac{d^2u}{dt^2}$$

Here are a few more examples of differential equations.

$$ay'' + by' + cy = g(t) \qquad (1)$$

$$\sin(y)\frac{d^2y}{dx^2} = (1-y)\frac{dy}{dx} + y^2 e^{-5y} \qquad (2)$$

$$y^{(4)} + 10y''' - 4y' + 2y = \cos(t) \qquad (3)$$

$$\alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t} \qquad (4)$$

$$a^2 u_{xx} = u_{tt} \qquad (5)$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial^2 x \partial t} = 1 + \frac{\partial u}{\partial y} \qquad (6)$$

The **order** of a differential equation: رتبة المعادلة التفاضلية is the largest derivative present in the differential equation. In the differential equations listed above

(1), (2), (4), and (5) are second order differential equations, (3) is a third order differential equation and (6) is a fourth order differential equation.

Exercises : find The **order** of a differential equation

$$y''' + 2y' + y = \sin x$$

$$y' + a(x)y = b(x)y^n \quad n \neq 1$$

$$y' + p(x)y = 0$$

$$dy/dx = (y+1)^2 / x du/dx + (1+x)du/dx = (1+x+y)u^2$$

degree of a differential equation: درجة المعادلة التفاضلية is the power of its highest derivative.

Example: Find **degree of a differential equation**

$$\frac{d^3y}{dx^3} + 4x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = y\frac{d^2y}{dx^2} + e^y$$ has order 3. degree 1

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3 + \frac{dy}{dx} = \sin x$$ is of order 2 and degree 3

$$4x^2y'' + 12xy' + 3y = 0$$ Has order 2 and degree 1

$$2ty' + 4y = 3$$ Has order 1 and degree 1

Exercises :

Find the order and degree, if defined , of each of the following differential equations :

(i) $\frac{dy}{dx} - \cos x = 0$

(ii) $xy\frac{d^2y}{dx^2} + x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - y\frac{dy}{dx} = 0$

(iii) $y''' + y^2 + e^{y'} = 0$

(v) $y(t) = \pm\sqrt{t^2 - 3}$

A linear differential equation: المعادلة التفاضلية الخطية

is any differential equation that can be written in the following form.

$$a_n(t)\,y^{(n)}(t)+a_{n-1}(t)\,y^{(n-1)}(t)+\cdots+a_1(t)\,y'(t)+a_0(t)\,y(t)=g(t)$$

A solution to a differential equation: حل المعادلة التفاضلية الخطية

Example 1 **Show that** $y(x)=x^{-\frac{3}{2}}$ **is a solution to** $4x^2y''+12xy'+3y=0$ **for** $x>0$.

Solution We'll need the first and second derivative to do this.

$$y'(x)=-\frac{3}{2}x^{-\frac{5}{2}} \qquad\qquad y''(x)=\frac{15}{4}x^{-\frac{7}{2}}$$

plug these as well as the function into the differential equation.

$$4x^2\left(\frac{15}{4}x^{-\frac{7}{2}}\right)+12x\left(-\frac{3}{2}x^{-\frac{5}{2}}\right)+3\left(x^{-\frac{3}{2}}\right)=0$$

$$15x^{-\frac{3}{2}}-18x^{-\frac{3}{2}}+3x^{-\frac{3}{2}}=0$$

$$0=0$$

So, $y(x)=x^{-\frac{3}{2}}$ does satisfy the differential equation and hence is a solution.

Exercises : show that

1- $xy=\frac{1}{3}x^3+c$ is a solution is $\frac{dy}{dx}+\frac{1}{x}y=x$

2 $y=ce^{-2x}+\frac{1}{5}(2\sin x-\cos x)$ is a solution is $y'+2y=\sin x$ is

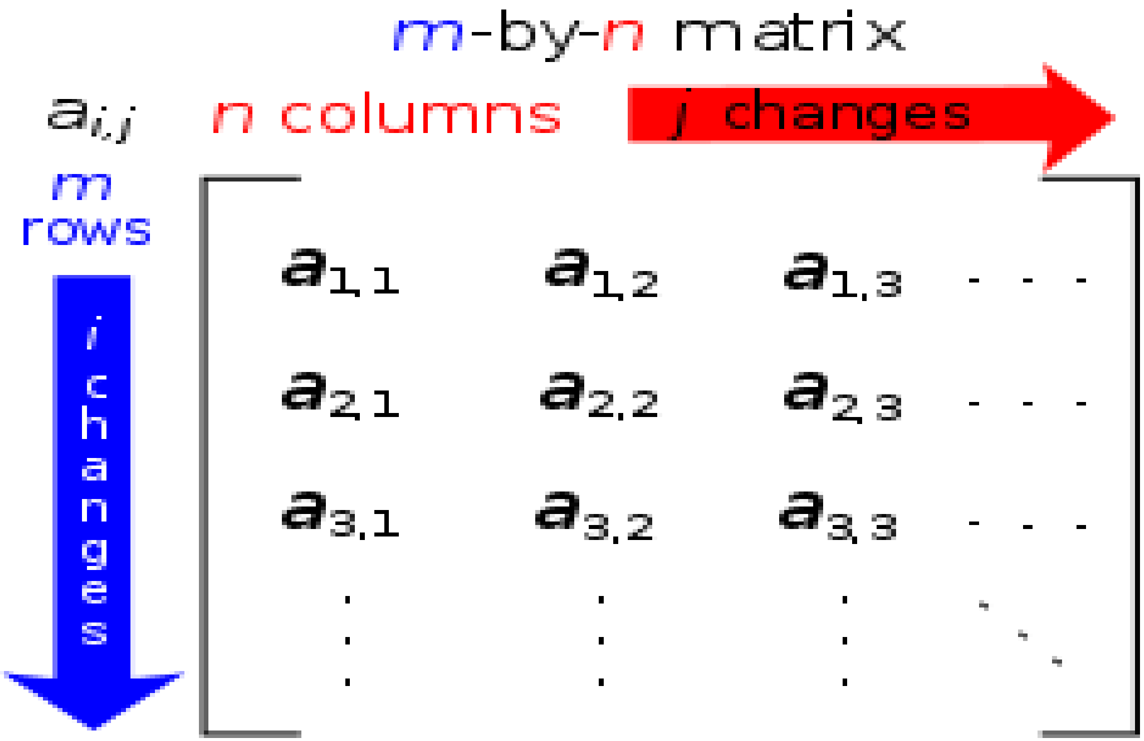
3- $y=x+\frac{1}{3}(x+c)^3$ is a solution is $y''^2=4(y'-1)$

الاسبوع الثاني

Matrix : المصفوفة

In mathematics, a **matrix** (plural: **matrices**) is a rectangular *array* of numbers, symbols, or expressions, arranged in *rows* and *columns*. For example, the dimensions of the matrix below are 2 × 3 (read "two by three"), because there are two rows and three columns:

$$\begin{bmatrix} 1 & 9 & -13 \\ 20 & 5 & -6 \end{bmatrix}.$$



Types of Matrixes: انواع المصفوفات

There are several types of matrices, but the most commonly used are:

- Rows Matrix — مصفوفة الصفوف
- Columns Matrix — مصفوفة الاعمدة
- Rectangular Matrix — المصفوفة المستطيلة
- Square Matrix — المصفوفة المربعة
- Diagonal Matrix — المصفوفة القطرية
- Scalar Matrix — المصفوفة العددية
- Identity Matrix — مصفوفة الوحدة
- Triangular Matrix — المصفوفة المثلثية
- Null or Zero Matrix — المصفوفة الصفرية
- Transpose of a Matrix — منقول المصفوفة

Row Matrix:

A matrix is said to be a row matrix if it has only one row.

EX:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Column Matrix:

A matrix is said to be a column matrix if it has only one column.

EX:

$$B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Rectangular Matrix:

A matrix is said to be rectangular if the number of rows is not equal to the number of columns.

EX:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

Square Matrix:

A matrix is said to be square if the number of rows is equal to the number of columns.

EX:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 5 & 2 & 4 \\ 1 & 9 & 6 \end{bmatrix}$$

Diagonal Matrix:

A square matrix is said to be diagonal if at least one element of principal diagonal is non-zero and all the other elements are zero.

EX:

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Scalar Matrix:

A diagonal matrix is said to be scalar if all of its diagonal elements are the same.

EX:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Identity or Unit Matrix:

A diagonal matrix is said to be identity if all of its diagonal elements are equal to one, denoted by I.

EX:

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \ I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Triangular Matrix:
A square matrix is said to be triangular if all of its elements above the principal diagonal are zero **(lower triangular matrix)** or all of its elements below the principal diagonal are zero **(upper triangular matrix)**.

EX: Lower Triangular Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

Upper Triangular Matrix

$$B = \begin{bmatrix} 5 & 8 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

Null or Zero Matrix:

A matrix is said to be a null or zero matrix if all of its elements are equal to zero. It is denoted by (O).

EX:

$$O = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad O = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Transpose of a Matrix:

Suppose A is a given matrix, then the matrix obtained by interchanging its rows into columns is called the transpose of A . . yb detoned si t A^T

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 8 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

$$A^t = \begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

Adding and subtract matrices: جمع وطرح المصفوفات

Matrix addition is fairly simple, and is done entry-wise.

- Add the following matrices:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 9 & 8 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & 5 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

I need to add the pairs of entries, and then simplify for the final answer:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 9 & 8 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & 5 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0+6 & 1+5 & 2+4 \\ 9+3 & 8+4 & 7+5 \end{bmatrix} =$$

So the answer is:

$$\begin{bmatrix} 6 & 6 & 6 \\ 12 & 12 & 12 \end{bmatrix}$$

Subtraction works entry-wise, too.

- Given the following matrices, find $A - B$ and $A - C$, or explain why you can not.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 6 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & -4 & 3 \\ 9 & -4 & -3 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 9 & -4 \end{bmatrix}$$

A and B are the same size, each being 2×3 matrices, so I can subtract, working entry-wise:

$$A - B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -4 & 3 \\ 9 & -4 & -3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1-0 & 2-(-4) & 0-3 \\ 0-9 & 3-(-4) & 6-(-3) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 2+4 & -3 \\ -9 & 3+4 & 6+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 6 & -3 \\ -9 & 7 & 9 \end{bmatrix}$$

$A - C$ is not defined, because A and C are not the same size

Example:

- Find the values of x and y given the following equation:

$$\begin{bmatrix} -3 & x \\ 2y & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}$$

First, I'll simplify the left-hand side a bit by adding entry-wise:

$$\begin{bmatrix} -3 & x \\ 2y & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3+4 & x+6 \\ 2y-3 & 0+1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & x+6 \\ 2y-3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$x + 6 = 7$$

$$x = 1$$

$$2y - 3 = -5$$

$$2y = -2$$

$$y = -1$$

الاسبوع الثالث

Matrices multiplication: ضرب المصفوفات

“Formula” of Scalar Multiplication (Easy Type)

Scalar c

$$cA = c \cdot \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_4 & a_5 & a_6 \\ a_7 & a_8 & a_9 \end{bmatrix}$$

$$cA = \begin{bmatrix} c(a_1) & c(a_2) & c(a_3) \\ c(a_4) & c(a_5) & c(a_6) \\ c(a_7) & c(a_8) & c(a_9) \end{bmatrix}$$

Scalar c is being multiplied to each entry or element of Matrix A

EXAMBLE: Given the following matrices, perform the indicated operation. Apply **scalar multiplication** as part of the overall simplification process.

$$A = \begin{bmatrix} -5 & 2 & 0 \\ 7 & -3 & 4 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 8 & 1 & 2 \\ -5 & 6 & 7 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$$

Find:

1- $\mathbf{2A}$

2- $\mathbf{-3B}$.

3- $\mathbf{-2D + 5B}$.

4- $\mathbf{2A+5D}$

then $2A$ is solved by…

$$2A = 2 \cdot \begin{bmatrix} -5 & 2 & 0 \\ 7 & -3 & 4 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2(-5) & 2(2) & 2(0) \\ 2(7) & 2(-3) & 2(4) \\ 2(-1) & 2(3) & 2(2) \end{bmatrix}$$

$$2A = \begin{bmatrix} -10 & 4 & 0 \\ 14 & -6 & 8 \\ -2 & 6 & 4 \end{bmatrix}$$

Matrix to Matrix Multiplication .

The <u>number of columns</u> of the **left matrix** must equal the <u>number of rows</u> of the **right matrix**.

Left Matrix

$$AB$$

Right Matrix

Matrix A	Matrix B
2 columns $A = \begin{bmatrix} -5 & 1 \\ 0 & 2 \\ 7 & -1 \end{bmatrix}$ 3 rows	3 columns $B = \begin{bmatrix} 6 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & -5 \\ 8 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 3 rows

Example: Given the following matrices, perform the indicated operation which is to find their product.

$$A=\begin{bmatrix} -5 & 2 & 0 \\ 7 & -3 & 4 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Find:

1- **BE**
2- $-3BC$.
3- **CA + AC.**
4- **EB-*B***

$$B=\begin{bmatrix} 8 & 1 & 2 \\ -5 & 6 & 7 \end{bmatrix}$$

$$C=\begin{bmatrix} 0 & -1 & 8 \\ 6 & -14 & 2 \\ 9 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$E=\begin{bmatrix} -5 & 1 \\ 0 & 2 \\ -11 & 7 \end{bmatrix}$$

$$BE=\begin{bmatrix}8 & 1 & 2\\ -5 & 6 & 7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-5 & 1\\ 0 & 2\\ -11 & 7\end{bmatrix}$$

$$BE=\begin{bmatrix}8 & 1 & 2\\ -5 & 6 & 7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-5 & 1\\ 0 & 2\\ -11 & 7\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}(8)(-5)+(1)(0)+(2)(-11) & (8)(1)+(1)(2)+(2)(7)\\ (-5)(-5)+(6)(0)+(7)(-11) & (-5)(1)+(6)(2)+(7)(7)\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-62 & 24\\ -52 & 56\end{bmatrix}$$ Final Answer!

Transpose of a Matrix: منقول المصفوفة

The **transpose** of a matrix is a new matrix whose rows are the columns of the original. (This makes the columns of the new matrix the rows of the original). Here is a matrix and its transpose:

$$\begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 4 & 0 & 4 \\ 7 & 10 & 3 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 7 \\ 4 & 0 & 10 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 0 \\ 7 & 10 \\ -1 & 8 \end{pmatrix}^T_{4\times 2} = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 7 & -1 \\ 4 & 0 & 10 & 8 \end{pmatrix}_{2\times 4}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}^T_{2\times 3} = \ ?$$

Determinants المحددات

A **determinant** is a square array of numbers (written within a pair of vertical lines) which represents a certain sum of products.

1- Calculating a 2 × 2 Determinant:

In general, we find the value of a 2 × 2 determinant with elements a, b, c, d as follc

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - cb$$

We multiply the diagonals (top left × bottom right first), then subtract.

Example 1

$$\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 4 \times 3 - 2 \times 1$$

$$= 12 - 2$$

$$= 10$$

الاسبوع الرابع والخامس

2- 3 × 3 Determinants:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

is called the **cofactor** of a_1 for the 3 × 3 determinant:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

Note that we are working down the first column and multiplying by the cofactor of each element.

Example: Evaluate

$$\begin{vmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 5 & -1 & 4 \\ 4 & -8 & 2 \end{vmatrix}$$

Solution:

$$\begin{vmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 5 & -1 & 4 \\ 4 & -8 & 2 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ -8 & 2 \end{vmatrix} -5\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -8 & 2 \end{vmatrix} +4\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= -2[(-1)(2)-(-8)(4)]-5[(3)(2)-(-8)(-1)]+4[(3)(4)-(-1)(-1)]$$

$$= -2(30)-5(-2)+4(11)$$

$$= -60+10+44$$

$$= -6$$

inverse matrix:

معكوس المصفوفة

1- inverse matrix 2x2

Example:

Find the inverse, A^{-1}, of

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -7 \end{pmatrix}$$

Solution:

Method 1 is as follows.

[1] Interchange leading diagonal elements:

$-7 \to 2; \qquad 2 \to -7$

$$\begin{pmatrix} -7 & -3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

[2] Change signs of the other 2 elements:

$-3 \to 3; \qquad 4 \to -4$

$$\begin{pmatrix} -7 & 3 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$$

[3] Find the determinant $|A|$

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -7 \end{vmatrix} = -14 + 12 = -2$$

[4] Multiply result of [2] by $\dfrac{1}{|A|}$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} -7 & 3 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{-2}\begin{pmatrix} -7 & 3 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3.5 & -1.5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

So we have found the inverse, as required.

Is it correct?

We check by multiplying our inverse by the original matrix. If we get the identity matrix (I) for our answer, then we must have the correct answer.

$$A^{-1}A = \begin{pmatrix} 3.5 & -1.5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -7 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 7-6 & -10.5+10.5 \\ 4-4 & -6+7 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= I$$

Exercise

Find the inverse of

$$\begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}$$

2- The inverse of a 3×3 matrix is given by:

$$A^{-1} = \frac{\text{adj}A}{\det A}$$

Example: Find the inverse of the following by using the adjoin matrix method.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 1 \\ 0 & 3 & -3 \\ 4 & -7 & 2 \end{pmatrix}$$

Solution:

Step 1:

Replace elements with cofactors and apply + and -

$$\begin{pmatrix} +(-15) & -(12) & +(-12) \\ -(19) & +(6) & -(-59) \\ +(-21) & -(-15) & +(15) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -15 & -12 & -12 \\ -19 & 6 & 59 \\ -21 & 15 & 15 \end{pmatrix}$$

Step 2

Transpose the matrix:

$$\text{adj}A = \begin{pmatrix} -15 & -19 & -21 \\ -12 & 6 & 15 \\ -12 & 59 & 15 \end{pmatrix}$$

Before we can find the **inverse** of matrix A, we need det A:

$$\begin{vmatrix} 5 & 6 & 1 \\ 0 & 3 & -3 \\ 4 & -7 & 2 \end{vmatrix} = 5(-15) + 4(-21) = -159$$

Now we have what we need to apply the formula

$$A^{-1} = \frac{\text{adj}A}{\det A}$$

So

$$A^{-1} = \frac{\operatorname{adj} A}{\det A}$$

$$= \frac{1}{-159}\begin{pmatrix} -15 & -19 & -21 \\ -12 & 6 & 15 \\ -12 & 59 & 15 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0.094 & 0.119 & 0.132 \\ 0.075 & -0.038 & -0.094 \\ 0.075 & -0.371 & -0.094 \end{pmatrix}$$

Exercise:

Find the inverse of

$$\begin{pmatrix} -2 & 6 & 1 \\ 0 & 3 & -3 \\ 4 & -7 & 3 \end{pmatrix}$$

الاسبوع السادس

1- Cramer's Rule to Solve 3 × 3 Systems of Linear Equations: حل المعادلات الخطية بطريقة كرامر

We can solve the general system of equations,

$$a_1x + b_1y + c_1z = d_1$$

$$a_2x + b_2y + c_2z = d_2$$

$$a_3x + b_3y + c_3z = d_3$$

by using the determinants:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\Delta}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\Delta}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}}{\Delta}$$

where

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

Example :

Solve, using Cramer's Rule:

$$2x + 3y + z = 2$$

$$-x + 2y + 3z = -1$$

$$-3x - 3y + z = 0$$

Solution:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & 1 \end{vmatrix}}{\Delta}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \\ -3 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{\Delta}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \\ -3 & -3 & 0 \end{vmatrix}}{\Delta}$$

So

$$x = \frac{2(11) + 1(6) + 0}{7} = \frac{28}{7} = 4$$

$$y = \frac{2(-1) + 1(2) - 3(7)}{7} = -\frac{21}{7} = -3$$

$$z = \frac{2(-3) + 1(6) - 3(-7)}{7} = \frac{21}{7} = 3$$

Checking solutions:

[1] $2(4) + 3(-3) + 3 = 2$ OK

[2] $-(4) + 2(-3) + 3(3) = -1$ OK

[3] $-3(4) - 3(-3) + 3 = 0$ OK

So the solution is $(4, -3, 3)$.

الاسبوع السابع

2- Matrices and Linear Equations: حل المعادلات الخطية، المصفوفات

Example : 3×3 System of Equations

Solve the system using matrix methods.

$$\begin{aligned} x + 2y - z &= 6 \\ 3x + 5y - z &= 2 \\ -2x - y - 2z &= 4 \end{aligned}$$

Solution: we find the inverse of A to be:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 5.5 & -2.5 & -1.5 \\ -4 & 2 & 1 \\ -3.5 & 1.5 & 0.5 \end{pmatrix}$$

So the solution to the system of equations is:

$$X = A^{-1}C$$

$$= \begin{pmatrix} 5.5 & -2.5 & -1.5 \\ -4 & 2 & 1 \\ -3.5 & 1.5 & 0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 22 \\ -16 \\ -16 \end{pmatrix}$$

Check:

$22 + 2(-16) - (-16) = 6$ [Checks OK]

$3(22) + 5(-16) - (-16) = 2$ [Checks OK]

$-2(22) - (16) - 2(-16) = 4$ [Checks OK]

So the solution is $x = 22$, $y = -16$ and $z = -16$.

Exercises: Find the currents using matrix methods.

1-
$$\begin{pmatrix} I_1 + I_2 + I_3 \\ -2I_1 + 3I_2 \\ -3I_2 + 6I_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 24 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2-
$$\begin{aligned} I_A + I_B + I_C &= 0 \\ 2I_A - 5I_B &= 6 \\ 5I_B - I_C &= -3 \end{aligned}$$

الاسبوع الثامن والتاسع

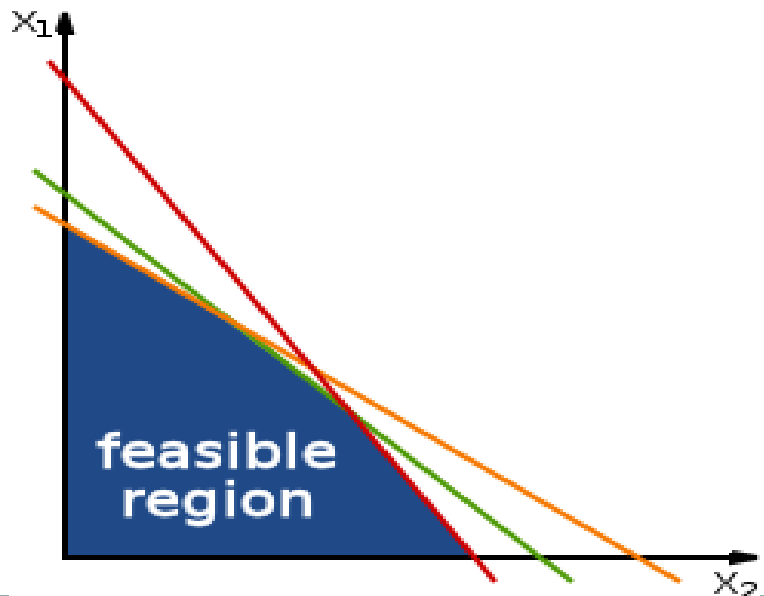
Linear programming: البرمجة الخطية

Definition of LINEAR PROGRAMMING

: a mathematical method of solving practical problems (such as the allocation of resources) by means of linear functions where the variables involved are subject to constraints.

Linear programs are problems that can be expressed in canonical form as:

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & c^T x \\ \text{subject to} & Ax \leq b \\ \text{and} & x \geq 0 \end{array}$$



Standard form is the usual and most intuitive form of describing a linear programming problem. It consists of the following three parts:

- **A linear function to be maximized**

  e.g. $f(x_1, x_2) = c_1 x_1 + c_2 x_2$

- **Problem constraints** of the following form

  e.g.

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &\leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &\leq b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 &\leq b_3 \end{aligned}$$

- **Non-negative variables**

  e.g.

$$\begin{aligned} x_1 &\geq 0 \\ x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Example 1: A store has requested a manufacturer to produce pants and sports jackets.
For materials, the manufacturer has 750 m^2 of cotton textile and 1,000 m^2 of polyester.
Every pair of pants (1 unit) needs 1 m^2 of cotton and 2 m^2 of polyester. Every jacket needs 1.5 m^2 of cotton and 1 m^2 of polyester.
The price of the pants is fixed at $50 and the jacket, $40.
What is the number of pants and jackets that the manufacturer must give to the stores so that these items obtain a maximum sale?

SOLUATION

1- Choose the unknowns.

x = number of pants

y = number of jackets

2-Write the objective function.

$$f(x,y) = 50x + 40y$$

3-Write the **constraints** as a **system of inequalities**.

To write the constraints, use a table:

	pants	jackets	available
cotton	1	1,5	750
polyester	2	1	1,000

$$x + 1.5y \leq 750$$

$$2x + y \leq 1000$$

As the number of pants and jackets are **natural numbers**, there are two more constraints $x \geq 0$

$$y \geq 0$$

Example 2:

A company is involved in the production of two items (X and Y). The resources need to produce X and Y are twofold, namely machine time for automatic processing and craftsman time for hand finishing. The table below gives the number of minutes required for each item:

	Machine time	Craftsman time
Item X	13	20
Y	19	29

The company has 40 hours of machine time available in the next working week but only 35 hours of craftsman time. Machine time is coasted at £10 per hour worked and craftsman time is coasted at £2 per hour worked. Both machine and craftsman idle times incur no costs. The revenue received for each item produced (all production is sold) is £20 for X and £30 for Y. The company has a specific contract to produce 10 items of X per week for a particular customer.

Formulate the problem of deciding how much to produce per week as a linear program.

Solution:

Let
x be the number of items of X
y be the number of items of Y
then the LP is:
maximize

- 20x + 30y - 10(machine time worked) - 2(craftsman time worked)

subject to:

- 13x + 19y <= 40(60) machine time
- 20x + 29y <= 35(60) craftsman time
- x >= 10 contract
- x,y >= 0

Exercise:

A company makes two products (X and Y) using two machines (A and B). Each unit of X that is produced requires 50 minutes processing time on machine A and 30 minutes processing time on machine B. Each unit of Y that is produced requires 24 minutes processing time on machine A and 33 minutes processing time on machine B.
At the start of the current week there are 30 units of X and 90 units of Y in stock. Available processing time on machine A is forecast to be 40 hours and on machine B is forecast to be 35 hours.
The demand for X in the current week is forecast to be 75 units and for Y is forecast to be 95 units. Company policy is to maximize the combined sum of the units of X and the units of Y in stock at the end of the week.

Formulate the problem of deciding how much of each product to make in the current week as a linear program.

Solution

Let

x be the number of units of X produced in the current week

y be the number of units of Y produced in the current week

then the constraints are:

- $50x + 24y <= 40(60)$ machine A time
- $30x + 33y <= 35(60)$ machine B time
- $x >= 75 - 30$
- i.e. $x >= 45$ so production of X >= demand (75) - initial stock (30), which ensures we meet demand
- $y >= 95 - 90$
- i.e. $y >= 5$ so production of Y >= demand (95) - initial stock (90), which ensures we meet demand

The objective is: maximise $(x+30-75) + (y+90-95) = (x+y-50)$

الاسبوع العاشر والحادي عشر

The methods used to solve the model for linear programming:

الطرق المستخدمة لحل نماذج البرمجة الخطية:

1- Graphically Method: الطريقة البيانية

Example 1:

Using the graphical method, find the solution of the systems of equations

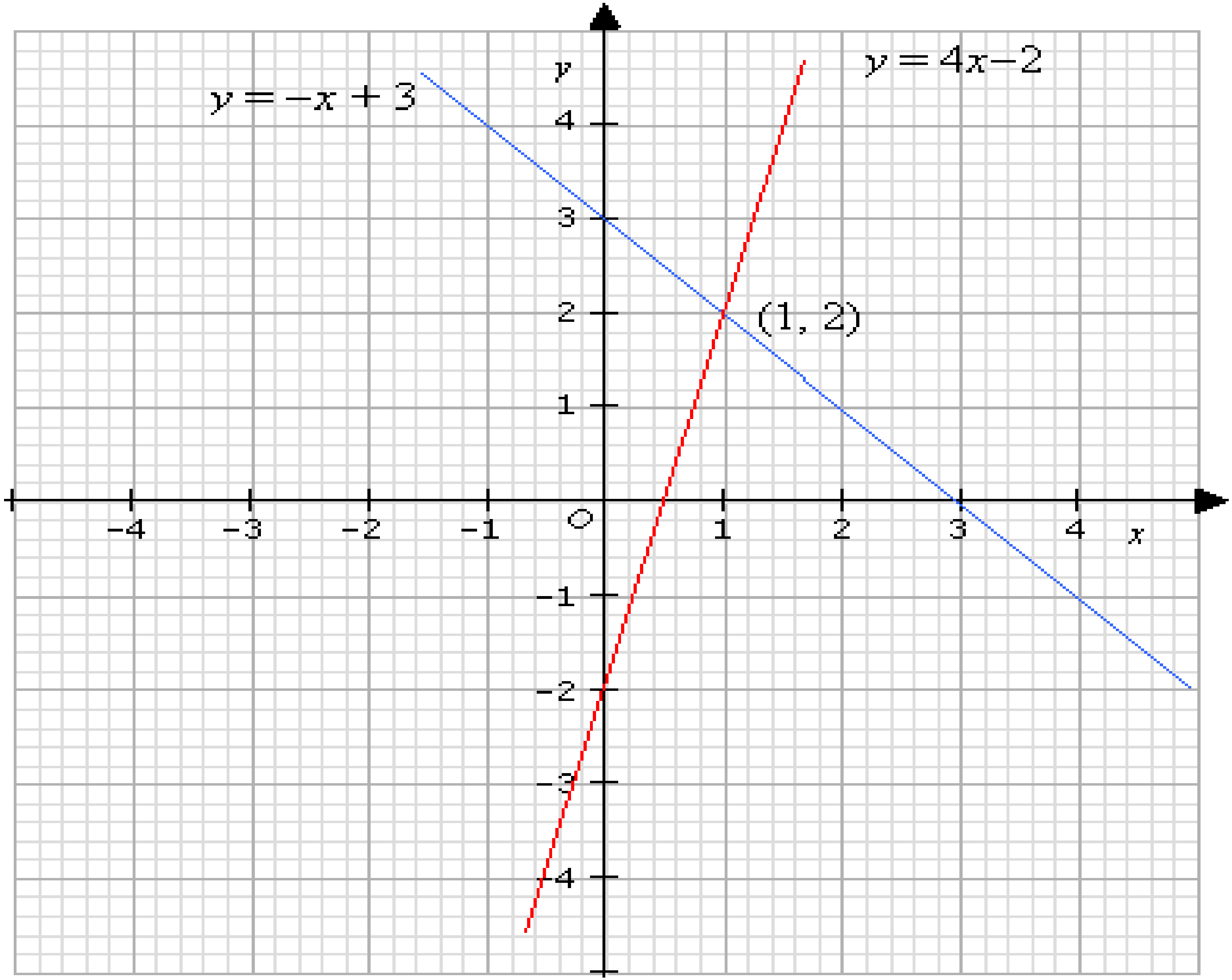
$y + x = 3$

$y = 4x - 2$

Solution:

Draw the two lines graphically and determine the point of intersection from the graph.

From the graph, the point of intersection is (1, 2)


y = −x + 3
y = 4x−2
(1, 2)
y
x
O
4
3
2
1
−1
−2
−3
−4
−4
−3
−2
−1
1
2
3
4

Example 2 :find the feasible solution for the problem of a decorative item dealer whose

is to maximize profit function.

$$Z = 50x + 18y \qquad (1)$$

Subject to the constraints

$2x + y \leq 100$

$x + y \leq 80$

$x \geq 0, \quad y \geq 0$

Step 1: Since $x \geq 0$, $y \geq 0$, we consider only the first quadrant of the xy - plan

Step 2: We draw straight lines for the equation

$$2x + y = 100 \qquad (2)$$

$x + y = 80$

To determine two points on the straight line $2x + y = 100$

Put $y = 0$, $2x = 100$

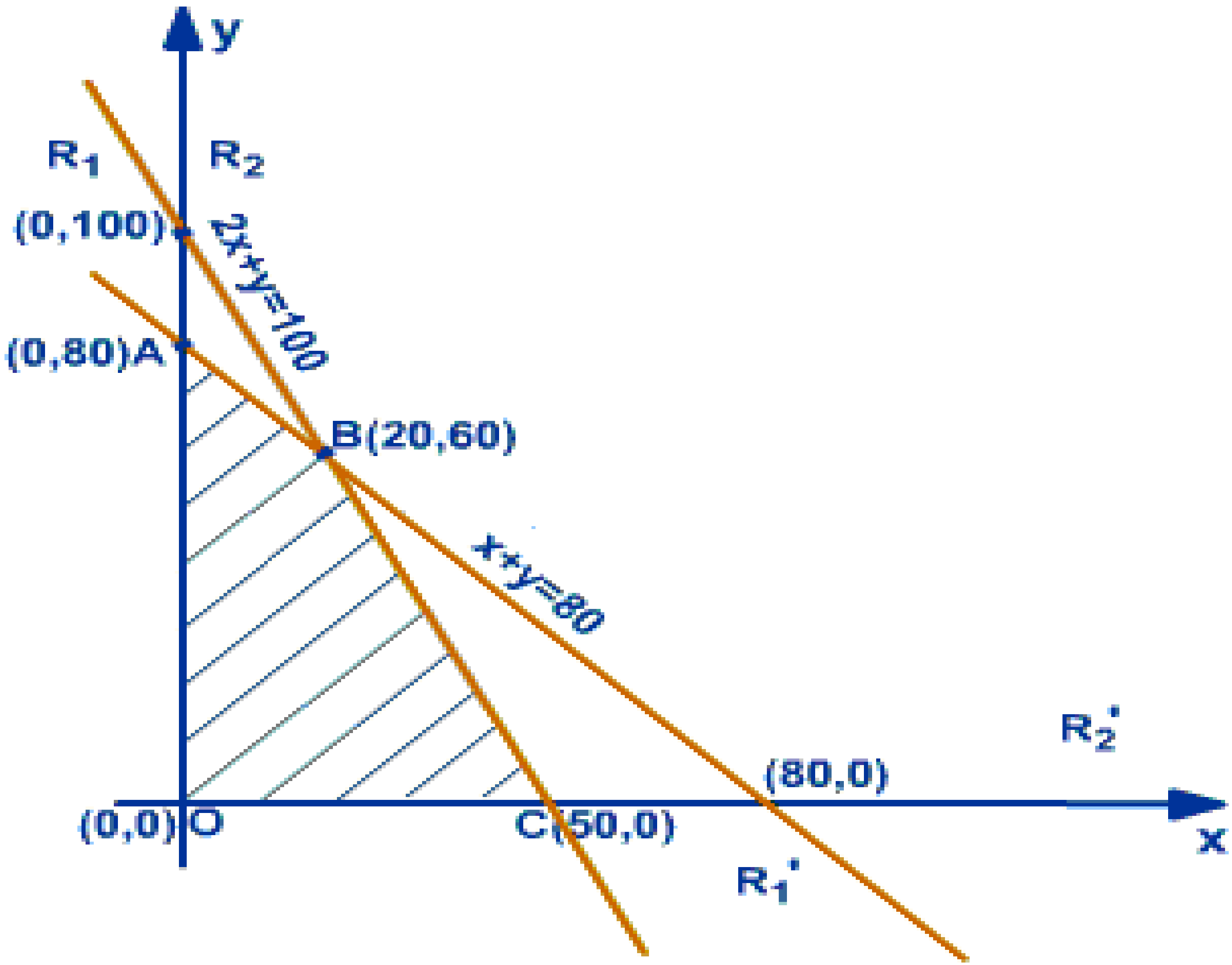
$\Rightarrow x = 50$

$\Rightarrow (50, 0)$ is a point on the line (2)

put $x = 0$ in (2), $y = 100$

$\Rightarrow (0, 100)$ is the other point on the line (2)

Plotting these two points on the graph paper draw the line which represent the line $2x + y = 100$.



y
R_1
R_2
(0,100)
2x+y=100
(0,80)A
B(20,60)
x+y=80
R_2'
(80,0)
(0,0) O
C(50,0)
x
R_1'

≥

Example 3: Solve the following LPP graphically using ISO-profit method.

Maximize $Z = 100X + 100y$.

Subject to the constraints

$10x + 5y \le 80$

$6x + 6y \le 66$

$4x + 8y \ge 24$

$5x + 6y \le 90$

$x \ge 0, \quad y \ge 0$

≥

Suggested answer:

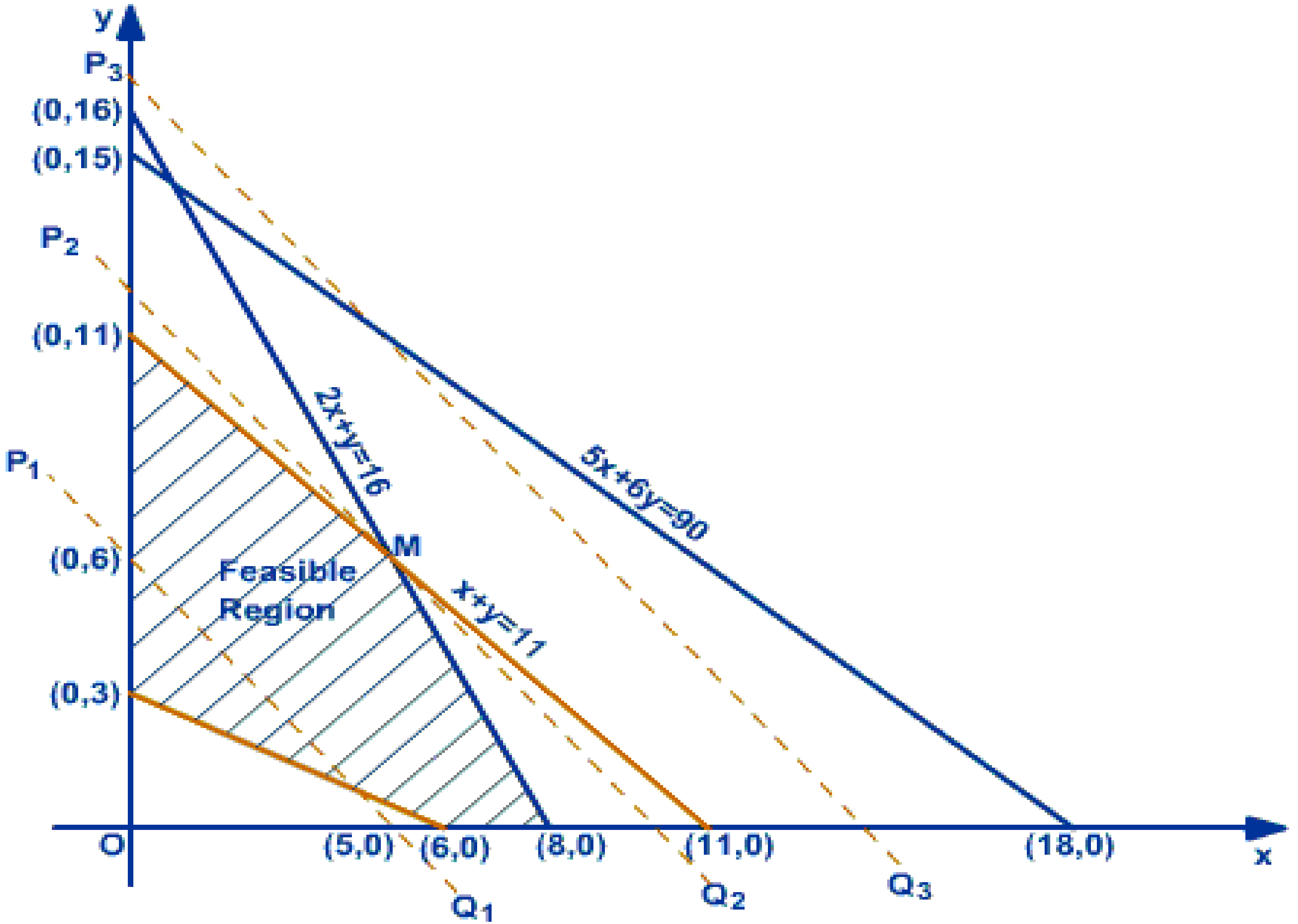
Since $x \geq 0$, $y \geq 0$, consider only the first quadrant of the plane graph the following straight lines on a graph paper

$10x + 5y = 80$ or $2x+y = 16$

$6x + 6y = 66$ or $x + y = 11$

$4x + 8y = 24$ or $x + 2y = 6$

$5x + 6y = 90$


y
P_3
(0,16)
(0,15)
P_2
(0,11)
P_1
(0,6)
(0,3)
2x+y=16
5x+6y=90
M
Feasible Region
x+y=11
O
(5,0)
(6,0)
(8,0)
(11,0)
(18,0)
x
Q_1
Q_2
Q_3

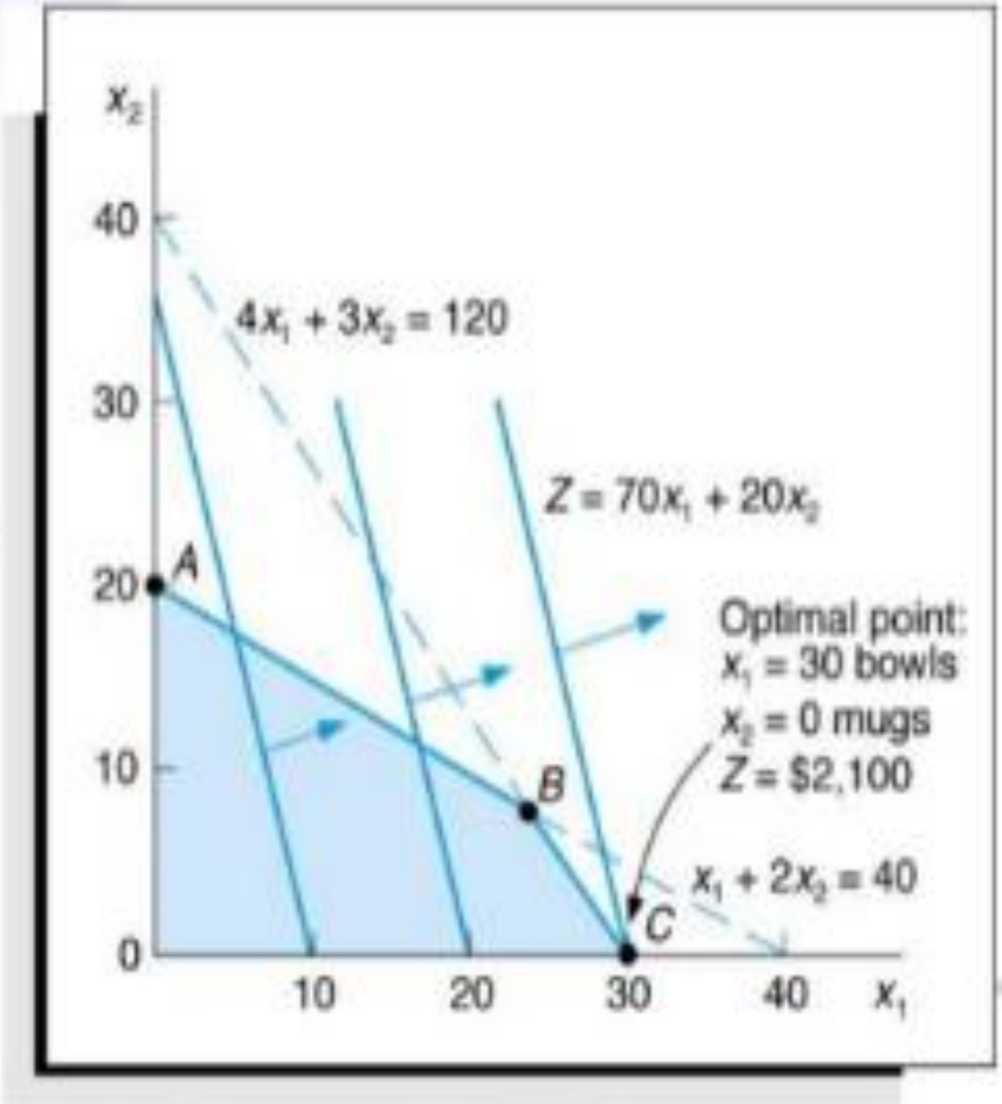
Example 4 :

Maximize $Z = \$70x_1 + \$20x_2$

subject to: $1x_1 + 2x_2 \leq 40$

$4x_2 + 3x_2 \leq 120$

$x_1, x_2 \geq 0$



Optimal Solution with $Z = 70x_1 + 20x_2$

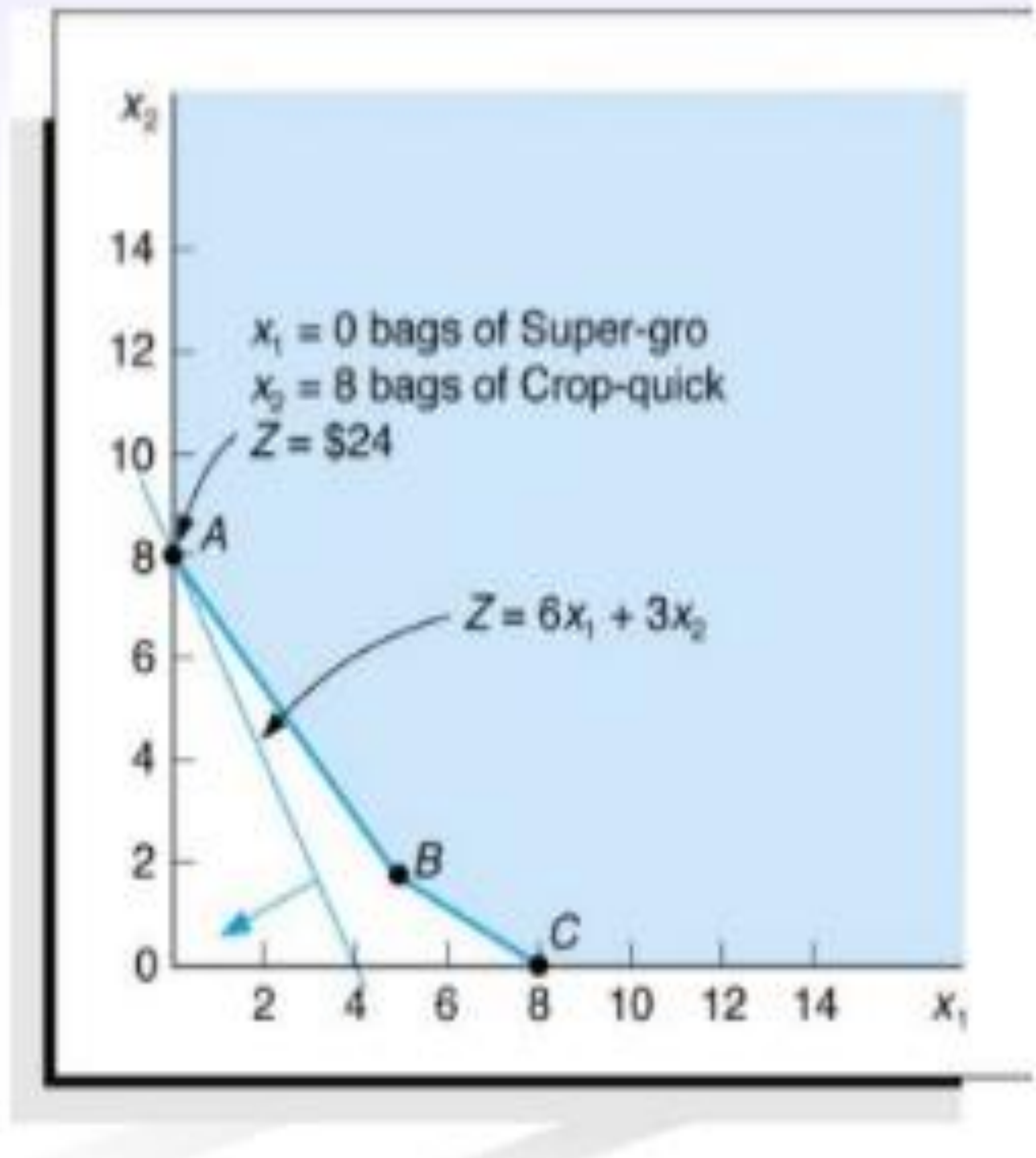
Example 5 :

Minimize $Z = \$6x_1 + \$3x_2$

subject to: $2x_1 + 4x_2 \geq 16$

$4x_2 + 3x_2 \geq 24$

$x_1, x_2 \geq 0$



Optimum Solution Point

Example 6 :

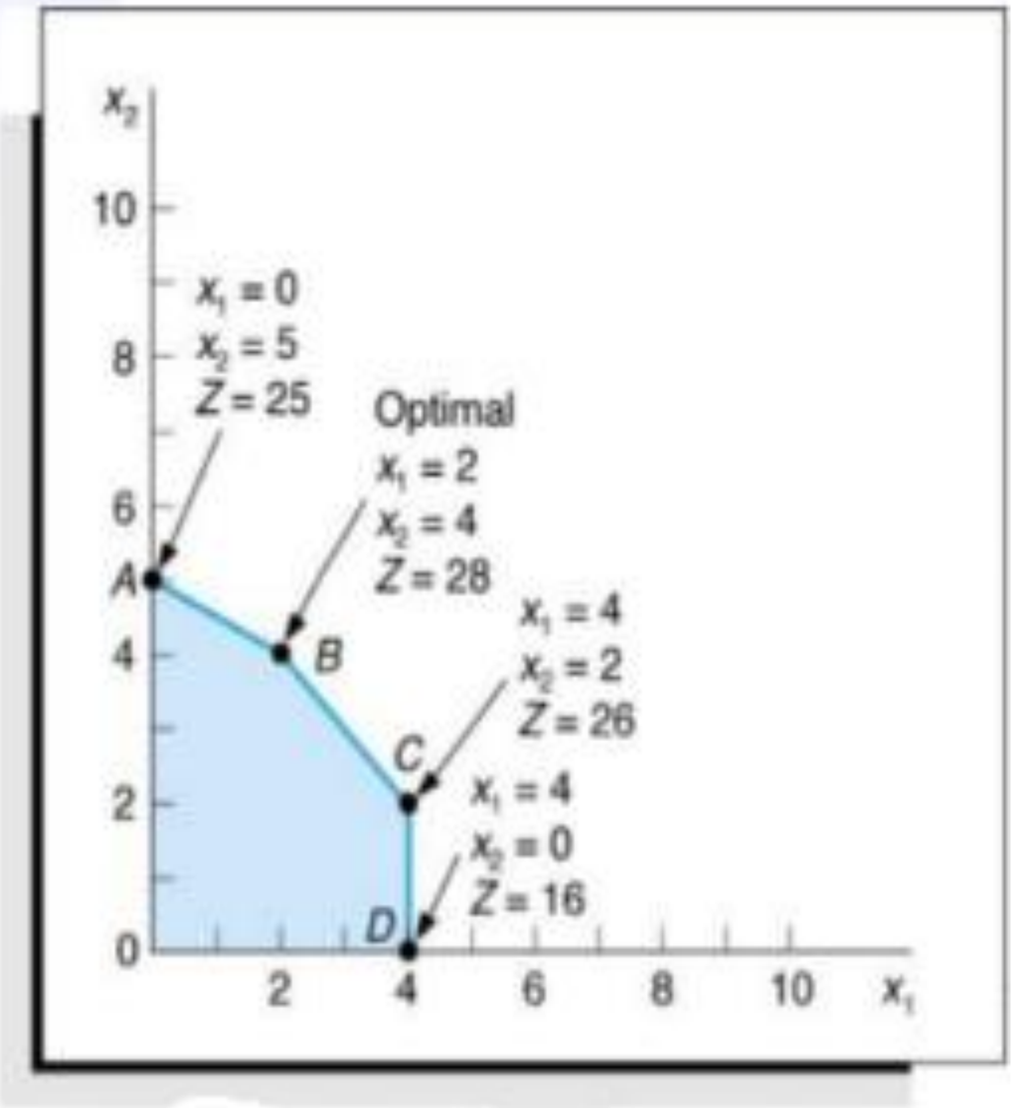
Maximize $Z = 4x_1 + 5x_2$

subject to: $x_1 + 2x_2 \leq 10$

$6x_1 + 6x_2 \leq 36$

$x_1 \leq 4$

$x_1, x_2 \geq 0$



Optimal Solution Point

Exercise:

1- Maximize $C = x + y$ given the constraints,

$$y \geq 0$$
$$x \geq 0$$
$$4x + 2y \leq 8$$
$$2x - y \leq 0$$

2- Maximize $Z = \$40x_1 + 30x_2$

subject to: $1x_1 + 2x_2 \leq 40$

$4x_2 + 3x_2 \leq 120$

$x_1, x_2 \geq 0$

3- Use the graphical method to find the optimal solution(s) of the given LP.

$$
\begin{array}{lll}
\min & z = & \frac{5}{2}x_1 + 2x_2 \\
\text{s.t.} & & x_1 + \frac{4}{5}x_2 \geq 8 \\
& & \frac{4}{15}x_1 + x_2 \geq 4 \\
& & x_j \geq 0
\end{array}
$$

4-

$$
\begin{array}{ll}
\max Z & \\
s.t.: & \\
\text{Const1} & x_1 + x_2 \leq 4 \\
\text{Const2} & 5x_1 + 2x_2 \leq 10 \\
\text{Const3} & -x_1 + 4x_2 \geq 0 \\
x_1, x_2 \geq 0 &
\end{array}
$$

a) $Z = x_1 + x_2$

b) $Z = 2x_1 + x_2$

c) $Z = 3x_1 + x_2$

الاسبوع الثاني عشر

Forms of Linear programming Models:

صيغ نماذج البرمجة الخطية

1- General Form of Linear Programming Model: الصيغة العامة

Model linear programming generally consists of:

$$\begin{matrix} Max \\ or \\ Min \end{matrix} \quad Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq = \geq b_i$$

$$j = 1, 2, 3 \ldots\ldots n$$

$$i = 1, 2, 3 \ldots\ldots m$$

$$x_j \geq 0$$

نجد ان (a, b, c) ثوابت، وان (X_{ij}) متغيرات.

2- Canonical Form of Linear Programming Model: الصيغة القانونية

1- Objective function (Max (only)).

2- Stuck restrictions (≤) only.

3- Model linear programming Canonical consists of:

$$Max \quad Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i$$

$$i = 1, 2, 3 \ldots\ldots m$$

$$j = 1, 2, 3 \ldots\ldots n$$

$$X_j \ge 0$$

3- Standard Form of Linear Programming Model: الصيغة القياسية

1- Objective function (Max or Min).

2- Stuck restrictions (=) only.

3- Add slack variables (+S) Non-negative. Add (+S) if Stuck restrictions (≤) and Add (-S) if Stuck restrictions (≥) And don't add anything if (=).

4-The right-hand side of the constraints be non-negative bi≥0

$$Max Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j + 0.S_i$$

5- Model linear programming Standard consists of:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + 0.\ S_i = b_i$$

$$i = 1, 2, 3 \ldots\ldots m$$

$$j = 1, 2, 3 \ldots\ldots n$$

$$x_j \geq 0$$

$$S_i \geq 0$$

Example : Transfer the G. L. P model to:

A) Canonical form? B)Standard form ?

$$Min\, Z = 2X_1 + 4X_2$$

S.t

$$3X_1 - X_2 \le 8 \quad \ldots 1$$

$$-5X_1 + 2X_2 \ge 3 \quad \ldots 2$$

$$4X_1 - X_2 = 6 \quad \ldots 3$$

$$|X_1 - X_2| \le 10 \quad \ldots 4$$

$$X_1 , X_2 \ge 0$$

Solution: (A)form Canonical

$$Max - Z = -2X_1 - 4X_2$$

$$S.t$$

$$3X_1 - X_2 \le 8 \quad ..1$$

$$+5X_1 - 2X_2 \le -3 \quad ..2$$

$$4X_1 - X_2 \le 6 \quad ..3$$

$$-4X_1 + X_2 \le -6 \quad ..4$$

$$X_1 - X_2 \le 10 \quad ..5$$

$$-X_1 + X_2 \le 10 \quad ..6$$

$$X_1 , X_2 \ge 0$$

(B)form Stander

(B)form Stander

$$Min\, Z = 2X_1 + 4X_2$$

$$S.t$$

$$\begin{aligned}
3X_1 - X_2 + S_1 &= 8 \quad ..1\\
-5X_1 + 2X_2 + S_2 &= 3 \quad ..2\\
4X_1 - X_2 &= 6 \quad ..3\\
X_1 - X_2 + S_3 &= 10 \quad ..4\\
-X_1 + X_2 \qquad S_4 &= 10 \quad ..5\\
X_1 , X_2 &\geq 0
\end{aligned}$$

الاسبوع الثالث والرابع عشر

The Simplex method : الطريقة المبسطة(السمبلكس)

1- Solution of (L.P) Model with Maximization Objective Function. حل النموذج في حال دالة الهدف من نوع تعظيم

Example 1 : Find the optimal solution for (L.P) model using Simplex Method?

$$(\text{Max. } Z = 30X_1 + 18X_2$$

S.t. :

$$X_1 + 2X_2 \leq 200$$

$$3X_1 + 2X_2 \leq 300$$

$$X_1 \qquad \leq 150$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

Solution:1-

$$\text{Max. } Z - 30X_1 - 18X_2 - 0S_1 - 0S_2 - 0S_3 = 0$$

S.t. :

$$X_1 + 2X_2 + S_1 = 200$$
$$3X_1 + 2X_2 + S_2 = 300$$
$$X_1 + S_3 = 150$$

$$X_1, X_2, S_1, S_2, S_3 \geq 0$$

Table 1 .2 تصميم جدول الحل الأولي، على النحو الآتي:

Basic Variables	Non - Basic Variables					الثوابت (b_i^s)	النسبة
	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	R.H.S	Ratio
Z	-30	-18	0	0	0	0	-
S_1	1	2	1	0	0	200	200
S_2	3	2	0	1	0	300	100
S_3	1	0	0	0	1	150	150

الصف المحوري العمود المحوري العنصر المحوري

Table 2

Basic Var.	Non-Basic Variables					الثوابت (b_i^*)
	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	R.H.S
$0 \le$ Z^*	0	2	0	10	0	3000
S_1	0	$\frac{4}{3}$	1	$-\frac{1}{3}$	0	100
X_1	1	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	0	100
S_3	0	$-\frac{2}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	1	50

$X_1 = 100, X_2 = 0, Z^* = 3000$ is Optimal solution

Example 2: Find the optimal solution for (L.P) model using Simplex Method?

$$\text{Max. } Z = 3X_1 + 5X_2$$

S. t. :

$$2X_1 + 3X_2 \leq 30$$

$$5X_1 + 4X_2 \leq 60$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

Solution:

$$\text{Max. } Z = -3X_1 - 5X_2 + 0S_1 + 0S_2 = 0$$

S.t. :

$$2X_1 + 3X_2 + S_1 = 30$$

$$5X_1 + 4X_2 + S_2 = 60$$

$$X_1, X_2, S_1, S_2 \geq 0$$

Table 1

Basic Var.	Non-Basic Var.				الثوابت (b_i^*) R.H.S	النسبة Ratio
	X_1	X_2	S_1	S_2		
Z	-3	-5	0	0	0	-
S_1	2	3	1	0	30	10
S_2	5	4	0	1	60	15

الصف المحوري

العمود المحوري

العنصر المحوري

Table 2

Basic Var.	Non-Basic Var.				الثوابت (b_i)
	X_1	X_2	S_1	S_2	R.H.S
Z^*	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{5}{3}$	0	50
X_2	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{1}{3}$	0	10
S_2	$\frac{7}{3}$	0	$-\frac{4}{3}$	1	20

$X_1 = 0, X_2 = 10, Z^* = 50$ is Optimal solution

Exercise : Find the optimal solution for (L.P) model using Simplex Method?

$$\text{Max. } Z = 6X_1 + 8X_2 + 2X_3$$

S. t. :

$$X_1 + X_2 \leq 2$$

$$X_1 + 3X_3 \leq 6$$

$$X_2 \leq 1$$

$$X_1, X_2, X_3 \geq 0$$

الاسبوع الخامس والسادس عشر

1- Solution of (L.P) Model with Minimization Objective Function. حل النموذج في حال دالة الهدف من نوع تقليل

It is by one of two methods

1. طريقة (M) الكبيرة (Big-M) method.

2. طريقة المرحلتين (Two- phase) method.

1- (Big-M) method: add **Artificial Variables** to side

Slack Variables

Example: Find the optimal solution for (L.P) model using (Big.M)Method?

$$\text{Min. } Z = 2X_1+X_2$$

S. t. :

$$X_1+3X_2 \geq 30$$

$$4X_1+2X_2 \geq 40$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

Solution: 1- Min. $Z = 2X_1 + X_2 + 0S_1 + 0S_2$

S. t. :

$$X_1 + 3X_2 - S_1 \quad = 30$$

$$4X_1 + 2X_2 \quad - S_2 = 40$$

$$X_1, X_2, S_1, S_2 \geq 0$$

2- add Artificial Variables to side Slack Variables

Min. $Z = 2X_1 + X_2 + 0S_1 + 0S_2 + MR_1 + MR_2$

S. t. :

Min. $Z = 2X_1 + X_2 + 0S_1 + 0S_2 + MR_1 + MR_2$

S. t. :

$$X_1 + 3X_2 - S_1 \quad + R_1 \quad = 30 \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$4X_1 + 2X_2 \quad - S_2 \quad + R_2 = 40 \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

$$X_1, X_2, S_1, S_2, R_1, R_2 \geq 0$$

M: Is Very Big

Table 1

Basic Var.	Non-Basic Var.						الثوابت	النسبة
	X_1	X_2	S_1	S_2	R_1	R_2	R.H.S	Ratio
Z	-2 + 5M	-1 + 5M	-M	-M	0	0	70 M	-
R_1	1	(3)	-1	0	1	0	30	10
R_2	4	2	0	-1	1 0	0	40	20

الصف المحوري

العمود المحوري

العنصر المحوري

Table 2

Basic Var.	Non-Basic Var.						الثوابت	النسبة
	X_1	X_2	S_1	S_2	R_1	R_2	R.H.S	Ratio
Z	$\frac{5}{3}+\frac{10}{3}M$	0	$-\frac{1}{3}+\frac{2}{3}M$	-M	$\frac{1}{3}-\frac{5}{3}M$	0	10+ 20M	-
X_2	$\frac{1}{3}$	1	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	0	10	30
R_2	$\frac{10}{3}$	0	$\frac{2}{3}$	-1	$-\frac{2}{3}$	1	20	6

الصف المحوري

العمود المحوري

العنصر المحوري

Table 3

Basic Var.	Non-Basic Var.						الثوابت
	X_1	X_2	S_1	S_2	R_1	R_2	R.H.S
Z^*	0	0	0	$-\frac{1}{2}$	$-M$	$\frac{1}{2}-M$	20
X_2	0	1	$-\frac{2}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{10}$	8
X_1	1	0	$\frac{1}{5}$	$-\frac{3}{10}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{3}{10}$	6

$X_1 = 6, X_2 = 8, Z^* = 20$ is Optimal solution

2- Two-Phase Method

Example : Find the optimal solution for (L.P) model using Two-phase Method?.

$$\text{Min. } Z = 2X_1 + X_2$$

S. t.

$$X_1 + 3X_2 \geq 30$$
$$4X_1 + 2X_2 \geq 40$$
$$X_1, X_2 \geq 0$$

Solution: first cases: 1-

$$\text{Min. } Z = 2X_1 + X_2 - 0S_1 - 0S_2$$

S. t.

$$X_1 + 3X_2 - S_1 = 30$$
$$4X_1 + 2X_2 - S_2 = 40$$
$$X_1, X_2, S_1, S_2 \geq 0$$

2-

$$X_1 + 3X_2 - S_1 + R_1 = 30 \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$4X_1 + 2X_2 - S_2 + R_2 = 40 \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

$$X_1, X_2, S_1, S_2, R_1, R_2 \geq 0$$

3- New Objective function

$$r = R_1 + R_2 \rightarrow Min$$

Table 1

Basic Var.	Non-Basic Var.						الثوابت	النسبة
	X_1	X_2	S_1	S_2	R_1	R_2	R.H.S	Ratio
r	5	5	-1	-1	0	0	70	-
R_1	1	3	-1	0	1	0	30	30
R_2	4	2	0	-1	0	1	40	10

الصف المحوري العمود المحوري العنصر المحوري

Table 2

Basic Var.	Non-Basic Var.						الثوابت	النسبة
	X_1	X_2	S_1	S_2	R_1	R_2	R.H.S	Ratio
r	0	$\frac{5}{2}$	-1	$\frac{1}{4}$	0	$-\frac{5}{4}$	20	-
R_1	0	$\frac{5}{2}$	-1	$\frac{1}{4}$	1	$-\frac{1}{4}$	20	8
X_1	1	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{4}$	·0	$\frac{1}{4}$	10	20

الصف المحوري

العمود المحوري

العنصر المحوري

Basic Var.	Non-Basic Var.						الثوابت	النسبة
	X_1	X_2	S_1	S_2	R_1	R_2	R.H.S	Ratio
r	0	0	0	0	-1	-1	0	-
X_2	0	1	$-\frac{2}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{10}$	8	-
X_1	1	0	$\frac{1}{5}$	$-\frac{3}{10}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{3}{10}$	6	-

د. بما إن قيمة دالة الهدف $(r = 0)$، والمقترنة ب $(C_j \le 0)$، مما يدل على وجود حل للنموذج، والاستمرار بالمرحلة الثانية.

Second cases:

المرحلة الثانية:

1. اعتماد نتائج الحل الأساسي النهائي الوارد بالجدول الثالث من المرحلة الأولى. بعد استبعاد المتغيرات الاصطناعية (R_1) وR_2)، ودالة الهدف (r) من الجدول.

2. اعتماد دالة الهدف الأصلية (Z)، والتي هي:

$$\text{Min. } Z = 2X_1 + X_2 + 0S_1 + 0S_2$$

Table 4

Basic Var.	Non-Basic Var.				الثوابت (b_i) R.H.S
	X_1	X_2	S_1	S_2	
Z	2	1	0	0	0
X_2	0	1	$-\frac{2}{5}$	$\frac{1}{10}$	8
X_1	1	0	$\frac{1}{5}$	$-\frac{3}{10}$	9

Table 5

Basic Var.	Non-Basic Var.				الثوابت (b_i')
	X_1	X_2	S_1	S_2	R.H.S
Z^*	0	0	0	$-\frac{1}{2}$	20
X_2	0	1	$-\frac{2}{5}$	$\frac{1}{10}$	8
X_1	1	0	$\frac{1}{5}$	$-\frac{3}{10}$	6

$X_1 = 6, X_2 = 8\ Z^* = 20$ is Optimal solution

Q1 /Find the optimal solution for the following (LP) model by using Big M method

Min. $Z= 6X_1+4X_2$

Subject to:

$$X_1+X_2 \geq 4$$
$$2X_1+3X_2 \leq 8$$
$$X_1 , X_2 \geq 0$$

Q2/Find the optimal solution (L.P) by using)two-phases method

Min. $Z= 3X_1+2X_2$

Subject to:

$$X_1+X_2 \quad \geq 2$$
$$2X_1+3X_2 \leq 8$$

$X_1 , X_2 \geq 0$

الاسبوع السابع عشر

Duality in Linear Programming: الثنائية في البرمجة الخطية

To each model by linear programming (a Primal model)

there is a model is called a (Dual model).

1- Primal Problem: المسألة الاولية

$$Max\,x_0 = \sum_{j=1}^{n} C_j X_j$$

$$s.to:$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \quad i = 1,2 \ldots m$$

$$x_j \ge 0 \qquad j = 1,2 \ldots n$$

2- Dual Problem: المسألة الثنائية

$$Min\ y_0 = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$$

$$s.to:$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq c_i \qquad j = 1,2\ldots n$$

$$y_i \geq 0 \qquad i = 1,2\ldots, m$$

Ex(1) If the Primary model for LP as the following

Max $z_0 = x_1+2x_2+3x_3+4x_4$

s. to:

$x_1+2x_2+2x_3+3x_4 \leq 20$

$2x_1+x_2+3x_3+2x_4 \leq 30$

$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$

وعليه يكون كتابة النموذج الثنائي (dual) كما يلي:

$$\text{Min } Z_0 = 20y_1 + 30y_2$$

s. to:

$$y_1 + 2y_2 \geq 1$$

$$2y_1 + y_2 \geq 2$$

$$2y_1 + 3y_2 \geq 3$$

$$3y_1 + 2y_2 \geq 4$$

$$y_1, y_2 \geq 0$$

Example (2) Write the Duality model for (LP

$$\text{Max } Z_0 = 5x_1 + 6x_2$$

s. to:

$$x_1 + 9x_2 \le 60 \rightarrow y_1$$

$$5X1 + 2x_1 + 3x_2 \le 45 \rightarrow y_2$$

$$2x_2 \le 20 \rightarrow y_3$$

$$x_1 \qquad \le 30 \rightarrow y_4$$

$$x_1, x_2 \ge 0$$

$$\text{Min } Z_0 = 60y_1 + 45y_2 + 20y_3 + 30y_4$$

s. to:

$$y_1 + 2y_2 + 5y_3 + y_4 \geq 5$$

$$9y_1 + 3y_2 - 2y_3 \geq 6$$

$$y_1, y_2, y_3, y_4 \geq 0$$

(3) Write the Duality model for (LP)

1- Max $Z_x = 5x_1 + 12x_2 + 4x_3$

s. to:

$x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 5$

$2x_1 - x_2 + 3x_3 = 2$

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

SOLUATION

Min $Z_y = 5y_1 + 2y_2$

s. to:

$y_1 + 2y_2 \geq 5$

$2y_1 - y_2 \geq 12$

$3y_1 + 3y_2 \geq 4$

$y_1 \geq 0$, y_2 unrestricted

Exercise:

1- $\text{Max } Z_x = x_1 + x_2$

s. to:

$3x_1 + x_2 + x_3 \le 6$

$x_1 - x_2 + x_3 = 4$

$-x_1 - 2x_2 \le -1$

$x_1, x_2, x_3 \ge 0$

2- $\text{Max } Z_x = 3x_1 + 5x_2$

s. to:

$2x_1 + 6x_2 \le 50$

$3x_1 + 2x_2 \le 35$

$5x_1 - 3x_2 \le 10$

$x_2 \le 20$

$x_1, x_2 \ge 0$

Exercise: For the problem (L.P) Model find:

1- The Dual Model?

2- Solve the problem using Dual simplex method?

$$Max Z_x = 30X_1 + 18X_2$$

s .t

$$\begin{array}{llll} Y_1 & X_1 + 2X_2 & \leq 200 & \ldots 1 \\ Y_2 & 3X_1 + 2X_2 & \leq 300 & \ldots 2 \\ Y_3 & X_1 & \leq 150 & \ldots 3 \end{array}$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

الاسبوع الثامن عشر

Transportation Models: نماذج النقل

Definition of Transportation Model:

وهوتحديد العدد الامثل من الوحدات التي ستنقل من المصدر (i) الى الموقع (j) باقل كلفة ممكنة (c)، وتكتب صيغة نموذج النقل بالشكل التالي:

$$Minimize\, X_0 = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} C_{ij} X_{ij}$$

$$\sum_{i=1}^{m} X_{ij} = a_i \quad i = 1,2,\ldots m$$

$$\sum_{j=1}^{n} X_{ij} = b_i \quad j = 1,2,\ldots n$$

$$X_{ij} \geq 0$$

لتسهيل دراسة مشكلة النقل تعرض الصورة الجدولية التالية التي تمثل نموذج نقل مبسطة من

$n=3, m=2$

كلفة نقل الوحدة الواحدة

عدد الوحدات التي ستنقل

From \ TO	D_1	D_2	D_3	الكمية المعروضة Supply
S_1	C_{11} X_{11}	C_{12} X_{12}	C_{13} X_{13}	a_1
S_2	C_{21} X_{21}	C_{22} X_{22}	C_{23} X_{23}	a_2
Demand	b_1	b_2	b_3	

استخرج قيمة x_0 الصغرى حيث

$$X_0 = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} C_{ij} X_{ij}$$

Balancing of Transportation Model: موازنة نموذج

٢٠٢١/٣٠

ينتج من التعريف العام لنموذج النقل إن

$$\sum_{j=1}^{n} b_j = \sum_{j=1}^{n}(\sum_{i=1}^{m} X_{ij}) = \sum_{i=1}^{m}(\sum_{j=1}^{n} X_{ij}) = \sum_{i=1}^{m} a_i$$

يعني إن الكمية المعروضة في جميع المصادر يجب أن تساوي الكمية المطلوبة كل المواقع

ولكن هذا الشرط بالنسبة للمواقع العملي ويعتبر شرط افتراضي إذ قد تكون الكمية المعروضة

أصغر أو أكبر من الكمية المطلوبة يكون النموذج غير متوازن "unbalanced" ·

بالذكر إن الشرط التوازن بتساوي الكمية المعروضة مع الكمية المطلوبة $(\sum_{i=1}^{m} a_n - \sum_{j=1}^{n} b_j)$ شرط مهماً لتطوير أسلوب النقل. ولكن بالرغم من ذلك فإن أي مسألة عملية بالإمكان جعلها متوازنة بتحويلها إلى مسألة يتساوى فيها العرض مع الطلب فعندما تكون الكمية المطلوبة أكبر من المعروضة يضاف لجدول التكاليف مصدر وهمي Dummy source يعمل على تجهيز الكمية التي حصل فيها العجز والتي مقدارها $(\sum_{j} b_j = \sum_{i} a_i)$

أما إذا كانت الكمية المطلوبة أصغر من المعروضة عندئذ يضاف موقع وهمي Dummy Destination يعمل على امتصاص الكمية المعروضة الإضافية والتي مقدارها $(\sum_{i} a_i - \sum_{j} b_j)$ بقي أن نذكر بأن تكاليف النقل للوحدة الواحدة (C_{ij}) المصدر الوهمي إلى جميع المواقع تساوي صفر لأنها مكافئة إلى عدم نقل أي عدد الوحدات من هذا المصدر، وبالمثل تكون كلفة نقل الوحدة الواحدة من المصادر إلى الموقع الوهمي تساوي صفر.

Solution Technique of Transportation Model: أسلوب حل نموذج النقل

1- Solution Starting Basic Feasible: ايجاد الحل الاساسي الابتدائي المقبول

هناك ثلاث طرق لايجاد الحل الاساسي المبدئي وهي:

1- طريقة الركن الشمالي الغربي Northwest- Corner Method

2- طريقة أقل كلفة ممكنة Least Cost Method

3- طريقة فوجل Vogel's Approximation Method (VAM)

1- North West –Corner Method: طريقة الركن الشمالي- الغربي

Example1: Find the solution starting basic feasible to transportation model .

To / From	D_1	D_2	D_3	D_4	Supply
S_1	10	0	20	11	15
S_2	12	7	9	20	25
S_3	0	14	16	18	5
Demand	5	15	15	10	45

Solution:

5	10			15-10-0→0
	5	15	5	25-20-5-0
			5	5 0
5	15 5 0	15	10 5 0	

وبهذا يصبح عدد المتغيرات الأساسية (الموجبة) التي تكون الحل الأساسي الابتدائي المقبول ستة متغيرات حسب القاعدة (m+n-1) وهي على الترتيب.

$x_{11}= 5 x_{12}= 10 x_{22}=5 x_{23}= 15 x_{24}= 5 \quad x_{34}= 5$

واعتماداً على هذه القيم تكون قيمة

$x_0= 5(10)+10(0)+5(7)+15(9)+5(20)+5(18)= 410$

الاسبوع التاسع عشروالعشرون

2- Least cost method

Example2: Find the basic primary solution of

TO / From	D_1	D_2	D_3	Supply
S_1	1	2	6	7
S_2	0	4	2	12
S_3	3	1	5	11
Demand	10	10	10	30

Solution:

1	2	7 6	7 0
10 0	4	2 2	12 2 0
3	10 1	1 5	11 1 0
10 0	10 0	10 8 7 0	

$x_{13}=9 \quad x_{21}=10 \quad x_{23}=2 \quad x_{32}=10 \quad x_{33}=1$

وقيمة دالة الهدف ستكون

$x_0= 7(6)+10(0)+2(2)+10(1)+1(5)= 61$ units

3- Vogel s Approximation Method:

ونعرض فيما يلي الخطوات الأساسي لهذه الطريقة:

1 - حساب الفرق بين اصغر كلفتين من كل صف ومن كل عمود من جدول التكاليف ويسمى هذا الفرق بكلمة الجزاء Penalty cost.

2- نختار الفرق الأكبر من بين تكاليف الجزاء للصفوف والأعمدة على السواء وفي حالة تساوي بعض الفروق نختار الصف أو العمود المناظر لأعلى فرق عشوائياً.

3- بعد تحديد الصف أو العمود المناظر الأكبر فرق نخصص قيمة للمتغير الذي تكون كلفة نقله ما يمكن في ذلك الصف والعمود أو تكون الكمية المخصصة هي أكبر كمية متاحة لتسديد حاجة الموقع المعني.

4- نحذف الصف أو العمود الذي أصبح مجموعة صفراً أي الذي تم تحقيقه.

2- نكرر الخطوات الأربعة أعلاه ونستمر إلى أن نوزع جميع الوحدات المعروضة على الوحدات المطلوبة.

وفيما يلي تطبيق لهذه الطريقة على المثال رقم 2.

T0 / From	D1	D2	D3	Supply	كلفة الجزاء للصفوف
S_1	1 7	2	6	7 0	1 1 1
S_2	0 2	4	2 10	2 0	2 4 -
S_3	3 1	1 10	5	11 1	2 2 2
demand	10 8 1	10 0	10 10 0		
كلف جزاء للاعمدة	1 1 2	1 1 1	3 - -		

Minz=7*(1)+2(0)+10(2)+0(7)+1(B)+10(1)=40

Exercise: Find the basic primary solution of by:

	D1	D2	D3	supply
S1	5	1	8	12
S2	2	4	0	14
S3	3	6	7	4
demand	9	10	11	30

1- North West –Corner Method.

2- Least cost method.

3- Vogel s Approximation Method.

الاسبوع الحادي والثاني والعشرون

Testing of S.B.F.S for optimal solution: اختبار الحل الاساسي الاولي المقبول للحصول على الحل الامثل

تتكون الخطوة الأساسية التالية بعد استخراج S.B.F.S في تحليلات نموذج النقل من اختبار هذا الحل للحصول على الحل الأمثل والذي تكون عنده قيمة دالة الكلفة الكلية أقل ما يمكن.

سوف نستخدم فيما يلي طريقتان لاختبار أمثلية S.B.F.S وهما:

1 - طريقة المسار المتعرج Stepping Stone Method

2 - طريقة عوامل الضرب Multipliers Method

1- Stepping Stone Method: طريقة المسار المتعرج

ذكرنا سابقاً إن عدد المربعات المشغولة في نموذج النقل (أي تلك التي تكون S.B.F.S) يساوي m+n-1 وتسمى هذه المتغيرات بالمتغيرات الأساسية أما المربعات غير المشغولة تسمى بالمتغيرات غير الأساسية ويتمثل الهدف الرئيس للاختبار في دراسة تأثير المتغيرات الغير أساسية على قيمة دالة الهدف فيما لو تحولت هذه المتغيرات إلى متغيرات أساسية

وتتكون الخطوات الأساسية لطريقة المسار المتعرج من:

1- تحديد المتغير الداخل Entering Variable من مجموعة المتغيرات الغير أساسية والمتغير الخارج Leaving Variable من مجموعة المتغيرات التي تكون S.B.F.S من أجل تحديد المتغير الداخل، نرسم مسار مغلق Closed loop لكل متغير غير أساسي. يتكون المسار من مجموعة من قطع المستقيمات المتعاقبة الأفقية والعمودية (أو العمودية والأفقية) بحيث تكون نهاية كل قطعة مستقيم بمتغير أساسي.

وفيما يلي توضيح للمسارات بالنسبة للجدول ادناه .

11 / 7	2	6
0 / 2	4	2 / 10
3 / 1	1 / 10	5

المتغيرات غير الأساسية	المسارات المغلقة
x_{12}	$x_{12} \rightarrow x_{11} \rightarrow x_{31} \rightarrow x_{32} \rightarrow x_{12}$
x_{13}	$x_{13} \rightarrow x_{23} \rightarrow x_{21} \rightarrow x_{11} \rightarrow x_{13}$
x_{22}	$x_{22} \rightarrow x_{21} \rightarrow x_{31} \rightarrow x_{32} \rightarrow x_{22}$
x_{33}	$x_{33} \rightarrow x_{23} \rightarrow x_{21} \rightarrow x_{31} \rightarrow x_{33}$

علماً إن نقطة بداية المسار يجب أن تكون مشابهة لنقطة النهاية.

علماً إن نقطة بداية المسار يجب أن تكون مشابهة لنقطة النهاية.

2. نحول قيمة المتغير الغير أساسي إلى قيمة موجبة تساوي وحدة واحدة للحفاظ على شروح الحل المقبول (Feasibility Conditions) ويتم هذا التحويل بإعطاء إشارات متعاقبة (1-، 1 +، 1- ، ...) للمتغيرات المكونة للمسار. فمثلاً لو أخذنا المتغير x_{12} وجعلنا قيمة تساوي 1 بدلاً من صفر. فإن هذا يتطلب لو أخذنا x_{11} بمقدار وحدة واحدة كي نحافظ على مجموع الصف الأول وكذلك زيادة قيمة المتغير x_{31} بمقدار وحدة واحدة وبالتالي تقليص قيمة المتغير x_{32} بمقدار وحدة واحد وبالتالي تقليص قيمة المتغير x_{32} بمقدار وحدة واحدة وهكذا.

3. نفترض إن c_{ij} تمثل مقدار الزيادة الصافية أو النقصان في قيمة دالة الهدف نتيجة تحويل المتغير الغير أساسي x_{ij} إلى متغير أساسي ولو طبقنا الإشارات المتعاقبة على المسارات المستخرجة من الجدول رقم 8 نحصل على:

$$\hat{c}_{12} = c_{12} - c_{11} + c_{31} - c_{32}$$
$$= 2 - 1 + 3 - 1 = 3$$

$$\hat{c}_{13} = c_{13} - c_{23} + c_{21} - c_{11}$$
$$= 6 - 2 + 0 - 1 = 3$$

$$\hat{c}_{22} = c_{22} - c_{21} + c_{31} - c_{32}$$
$$= 4 - 0 + 3 - 1 = 6$$

$$\hat{c}_{33} = c_{33} - c_{23} + c_{21} - c_{31}$$
$$= 5 - 2 + 0 - 3 = 0$$

4 . إذا كانت جميع قيم $\hat{c}_{ij} \geq 0$ فهذا يعني عدم إمكانية تقليص قيمة دالة الهدف ويكون أل S.B.F.S هو الأمثل.

5. إذا احتوت قيم $\hat{c}_{ij}$ على قيم سالبة عندئذ نبدأ بتطبيق الحسابات التكرارية من أجل تقليص قيمة دالة الهدف وتتضمن هذه الحسابات تحديد المتغير الداخل والخارج ونستمر بتطبيق هذه الحسابات حتى يتحقق الحل الأمثل.

وفيما يلي مثال توضيحي لما ذكر أعلاه:

Example: Find the optimal solution (TP) if m=3, n=3

5	1	8	12
2	4	0	14
3	6	7	4
9	10	11	

SOLUATION:

5 2	1 10	8	12
2 3	4	0 11	14
3 4	6	7	4
9	10	11	

الآن نقوم باختيار S.B.F.S الموضح في الجدول اعلاه بطريق المسار المتعرج

$$x_{13}: x_{13}^{+} \to x_{11}^{-} \to x_{21}^{+} \to x_{23}^{-} \to x_{13}$$

$$\hat{c}_{13} = 8 - 5 + 2 - 0 = 5$$

$$x_{22}: x_{22}^{+} \to x_{12}^{-} \to x_{11}^{+} \to x_{21}^{-} \to x_{22}$$

$$\hat{c}_{22} = 4 - 1 + 5 - 2 = 6$$

$$x_{32}: x_{32}^{+} \to x_{12}^{-} \to x_{11}^{+} \to x_{31}^{-} \to x_{32}$$

$$\hat{c}_{32} = 6 - 1 + 5 - 3 = 7$$

$$x_{33}: x_{33}^{+} \to x_{31}^{-} \to x_{21}^{+} \to x_{23}^{-} \to x_{13}$$

$$\hat{c}_{13} = 7 - 3 + 2 - 0 = 6$$

إن جميع قيم $\hat{c}_{ij}$ موجبة إذ عن الحل المستخرج في الجدول رقم 10 يمثل الحل الأمثل

الذي تكون عنده قيمة دالة الهدف أقل ما يمكن

$$x_0 = 2(5)+10(1)+3(2)+11(0)+4(3) = 38$$

Exercise: Find the optimal solution (TP) if m=3, n=3

5	1	8	12
2	4	0	14
3	6	7	4
9	10	11	

الاسبوع الثالث والرابع والعشرون

2- Multipliers Method

الخطوات الأساسية لطريقة عوامل الضرب ثم نوضحها بعد ذلك بالأمثلة:

1. بعد استخراج أل S.B.F.S نعرف عوامل الضرب للصفوف بالمتغير u_i حيث $(i=1,2,\ldots,m)$

وللأعمدة بالمتغير v_j حيث $(j=1,2,\ldots n)$

2 . لكل متغير من المتغيرات الأساسية التي تكون أل S.B.F.S

نكتب المعادلة التالية $u_i+v_j=c_{ij}$

وسيكون عدد هذه المعادلات في الواقع $=m+n-1$

نستخرج قيم u_i, v_j من حل المعادلات المستخدمة في الخطوة الثانية يتم حلها بإعطاء قيمة افتراضية لأحد هذه العوامل وللسهولة تعطى قيمة صفر للعامل u_i ثم نستخرج قيم للعوامل الباقية من التعويض المباشر.

نستخدم قيم عوامل الضرب v_j, u_i لاختبار تأثير المتغيرات الغير أساسية على قيمة دالة الهدف فيما حولت هذه المتغيرات إلى متغيرات أساسية مما يتطلب استخراج قيم التي تمثل الزيادة الصافية أو النقصان لكل متغير غير أساس حيث إن:

$$\hat{c}_{ij} = c_{ij} - v_i - u_j$$

فإذا كانت جميع قيم $\hat{c}_{ij}$ موجبة أو صفر عندئذ نتوقف عن الحسابات التكرارية ويكون أل

S.B.F.S هو الحل الأمثل. أما إذا احتوت قيم: $\hat{c}_{ij}$ على قيم سالبة عندئذ نحدد المتغير

الداخل والخارج وسنستمر باستخدام الخطوات المطبقة في طريقة المسار المتعرج.

Example: Find the optimal solution to (TP)

0	4	2	8
2	3	4	5
1	2	0	6
7	6	6	19 \ 19

الحل: نستخرج أل S.B.F.S مباشرة باستخدام طريقة أقل كلفة ممكنة النموذج متوازن.

نلاحظ إن من الجدول اعلاه إن كل من $c_{11}=0$، $c_{33}=0$ لذلك نخصص للمتغير x_{11} أو x_{33}، ولو أخذنا المتغير x_{11} نحصل على الحل الموضح في الجدير ان جدول اعلاه الذي يوضح أل S.B.F.S وقد اعتبر المتغير x_{13} متغير أساسي بقيمة تساوي صفر كي نحقق عدد المتغيرات الأساسية والذي يساوي m+n-1

0 7	4 1	2 0	8
2	3	4	5
1	2	0	6
7	6	6	

الخطوة التالية تتمثل في اختبار الحل الأساسي الابتدائي المقبول المعطى في الجدول السابق باستخدام طريقة عوامل الضرب نعرف عوامل الضرب للصفوف ب u_3,u_2,u_1 على الترتيب وللأعمدة ب v_3,v_2,v_1 ثم نكتب مجموعة المعادلات الخاصة بالمتغيرات الأساسية وهي:

$$c_{11}=u_1+v_1 \rightarrow 0 = u_1+v_1 \ldots 1$$

$$c_{12}=u_1+v_2 \rightarrow 4 = u_1+v_2 \ldots 2$$

$$c_{13}=u_1+v_3 \rightarrow 2 = u_1+v_3 \ldots 3$$

$$c_{22}=u_2+v_2 \rightarrow 3 = u_2+v_2 \ldots 4$$

$$c_{33}=u_3+v_3 \rightarrow 0 = u_3+v_3 \ldots 5$$

نحل المعادلات هذه لتحديد قيم (u_3,u_2,u_1) و (v_3,v_2,v_1)

نفرض إن $u_1=0$ من هذا ينتج $v_3=2$ $v_2=4$ $v_1=0$ $u_2=-1$ $u_3=-2$

أما الخطوة الرئيسية التالية بعد تحديد قيم العوامل فهي استخراج قيم $\hat{c}_{ij}$ لكل المتغيرات الغير أساسية والموجودة في الجدول 15 وكما يلي:

$$\hat{c}_{21} = c_{21} - u_2 - v_1$$
$$= 2 - (-1) - 0 = 3$$

$$\hat{c}_{23} = c_{23} - u_2 - v_3$$
$$= 4 - (-1) - 2 = 3$$

$$\hat{c}_{31} = c_{31} - u_3 - v_1$$
$$= 1 - (-2) - 0 = 3$$

$$\hat{c}_{32} = c_{32} - u_3 - v_2$$
$$= 2 - (-2) - 4 = 0$$

بما ان جميع القيم اعلاه موجبة واصفار .

اذن فأن الحل يعتبر أمثلا .

الجدول التالي يلخص المعلومات المذكورة أعلاه

	$v_1 = 0$	$v_2 = 4$	$v_3 = 2$	
$u_1 = 0$	0 7	4 1	2 0	8
$u_2 = -1$	2 3	3 5	4 3	5
$u_3 = -2$	1 3	2 0	0 6	6
	7	6	6	

إن جميع قيم مثلى $0 \geq \hat{c}_{ij}$ ∴ الحل المستخرج في الجدول رقم 16 يمثل الحل أما قيمة دالة الهدف فتساوي

$$x_0 = 7(7)+1(4)+5(3)+6(0) = 19$$

Exercise: Find the optional solution to (TP) un Balancing

	1	2	3	SUPPLY
S_1	5	1	0	20
S_2	3	2	4	10
S_3	7	5	2	15
S_4	9	6	0	15
demand	5	10	15	

الاسبوع الخامس والسادس والعشرون

Assignment Problem: مشكلة التخصيص

تخصيص m من الأعمال على n من الآلات بضمنها تكاليف الفرص حيث

A job= i= 1,2,…,mالعمل

a machine= j= 1,2,…,nالماكنة

والهدف هو تخصيص العمل على الآلة j (عمل واحد لكل ماكنة) one job per machine (تخصيص المعقول) بحيث إجمالي التكاليف تصبح أقل ما يمكن (الربح الكلي يصبح أكبر ما يمكن).

ولتوضيح مشكلة التخصيص نعطي الجدول الآتي:

الآلة / العمل	**1**	**2**	**...**	**n**	
1	c_{11}	c_{12}	...	c_{1n}	1
2	c_{12}	c_{22}	...	c_{2n}	1
:					:
M	c_{m1}	c_{m2}	...	c_{mn}	1
	1	1	...	1	

لذا فإنه من الضروري قبل حل مشكلة التخصيص لابد أن يكون عدد الأعمال= عدد الآلات أي m=n ومن ذلك فإن هناك !n من التراتيب الممكنة لعمل مصفوفة التخصيص.

Identifying Specialization Model : تعريف نموذج التالي :

دالة الهدف

$$Min(or\, Max)\, x_0 = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} c_{ij}^{(0)}$$

$$s.to:$$

$$x_{ij} = x_{ij}^2$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = 1$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1$$

$$x_{ij} = 1\, or\, x_{ij} = 0$$

Assignment Methods : طرق التخصيص

1- Different combination method: طريقة العد الكامل

$n! = 3! = 3.2.1 = 6$ عدد التراتيب الممكنة لعمل التخصيص

EX/1

جدول رقم (1)

الآلة / العمل	1	2	3	
1	5	7	9	1
2	14	10	12	1
3	15	13	16	1
	1	1	1	

جدول رقم(2)

الآلة / العمل	1	2	3	
1	1			1
2		1		1
3			1	1
	1	1	1	

$X_0 = 15+10+16 = 31$

جدول رقم(3)

الآلة / العمل	1	2	3	
1			1	1
2		1		1
3	1			1
	1	1	1	

$X_0 = 9+10+15 = 34$

2-The Hungarian Method: الطريقة الهنكارية

وهي طريقة مباشرة للتخصيص وتدعى خوارزمية جونسون

أولا : خطوات حل مشكلة التخصيص في حالة التقليل.

١. طرح اصغر قيمة(كلفة Cij) في كل عمود من باقي قيم ذلك العمود للحصول على صفر واحد على الأقل في كل عمود.
٢. طرح اصغر قيمة(كلفة Cij) في كل صف من باقي قيم ذلك الصف للحصول على صفر واحد على الأقل في كل صف.
٣. تغطية الأصفار الناتجة في (الصفوف و الأعمدة) بأقل عدد من المستقيمات
٤. إذا كان عدد المستقيمات يساوي عدد صفوف أو أعمدة الجدول ، فإننا في هذه الحالة قد توصلنا إلى الحل المطلوب . إما إذا كان عدد الصفوف أو الأعمدة لا يساوي عدد المستقيمات ، ففي هذه الحالة نقوم باختيار اصغر قيمة من القيم غير المغطاة و طرحها من جميع القيم غير المغطاة ، و إضافتها إلى قيم نقاط تقاطع المستقيمات ثم تغطية الأصفار الناتجة في (الصفوف و الأعمدة) بأقل عدد من المستقيمات .

٥. بعد ذلك يتم التخصيص من خلال اختيار (المدير أو العامل ،...الخ) الذي يقابل اقل عدد من الأصفار في الصف ، و نقوم بشطب الصف الذي يوجد فيه الصفر و هكذا حتى ننتهي من عملية التخصيص في جميع الصفوف .

٦. حساب التكاليف الكلية على أساس قيم التكاليف في المصفوفة الأصلية.

ملاحظة :

عند تطبيق الطريقة الهنغارية في حالة التعظيم (الإرباح أو العوائد) يتم أولا طرح جميع قيم الجدول من اعلي قيمة فيه ، بعد ذلك يتم تطبيق خطوات الحل السابقة الذكر.

Example: find the specialization which is gave the less cost by The Hungarian Method .

المهام العمال	1	2	3
A	15	14	8
B	4	9	7
C	7	2	9

Solution:

١. طرح اصغر قيمة في كل عمود من جميع قيم ذلك العمود لتصبح:

	1	2	3
A	11	12	1
B	0	7	0
C	3	0	2

2. طرح اصغر قيمة في كل صف من جميع قيم ذلك الصف ،في الجدول الوارد في الفقرة 1 و نغطي الأعمدة و الصفوف التي تحتوي على أصفار بأقل عدد ممكن من المستقيمات.كما يلي:

	1	2	3
A	10	11	0
B	0	7	0
C	3	0	2

و بما إن عدد المستقيمات يساوي عدد الصفوف ، فإننا توصلنا إلى الحل المطلوب ، و بإمكاننا إجراء عملية التخصيص و على النحو التالي:

١. تخصيص العامل (A) لانجاز المهمة (3).
٢. تخصيص العامل (B) لانجاز المهمة (1).
٣. تخصيص العامل (C) لانجاز المهمة (2).

و إن التكاليف الكلية لقرار هذا التخصيص هي :

TC min= 8+4+2=14 دينار

Exercise1: find the specialization which is gave the less cost by The Hungarian Method .

	1	**2**	**3**	**4**
A	15	18	21	24
B	19	23	22	24
C	26	17	16	19
D	19	21	23	17

Cases of non-balanced: الحالات غير المتزنة لمشكلة التخصيص

Example: The very best allocation for technicians, so that costs can be achieved the maximum of what can be, the method Hungarian.

المكائن / الفنيين	A	B	C	D
1	90	40	60	80
2	70	60	80	
50				
3	80	70	50	50

	A	B	C	D
1	90	40	60	80
2	70	60	80	50
3	80	70	50	50
4	0	0	0	0

solution

١- بما إن (m<n) يضاف صف (4) وهمي لتصبح المصفوفة مربعة كالتالي:

٢- نختار أصغر قيمة في كل صف و نطرحهما من بقية القيم في الصف لنحصل على:

	A	B	C	D
1	50	0	20	40
2	20	10	30	0
3	30	20	0	0
4	0	0	0	0

٣ـ نغطي الأعمدة والصفوف التي تضم أصفار بخطوط :

	A	B	C	D
1	50	0	20	40
2	20	10	30	0
3	30	20	0	0
4	0	0	0	0

ـ بما أن عدد الخطوط يساوي ٤ وهو يساوي عدد الأعمدة و الصفوف يكون التخصيص الأمثل كالتالي:

الفنيين	المشروع	التكاليف
١	B	40
2	D	50
3	C	50
4	A	0

Exercise1: find the specialization which is gave the less cost by The Hungarian Method .

الفنيين \ المكائن	A	B	C
1	1	4	7
2	8	3	1
3	5	6	2
4	4	1	7

الاسبوع السابع والعشرون

Probability: الاحتمالية

Many events can't be predicted with total certainty. The best we can say is how **likely** they are to happen, using the idea of probability.

Tossing a Coin

When a coin is tossed, there are two possible outcomes:

- heads (H) or
- tails (T)

We say that the probability of the coin landing **H** is ½

And the probability of the coin landing **T** is ½

Throwing Dice

When a single die is thrown, there are six possible outcomes: **1, 2, 3, 4, 5, 6**.

The probability of any one of them is $\frac{1}{6}$

Probability

In general:

$$\text{Probability of an event happening} = \frac{\text{Number of ways it can happen}}{\text{Total number of outcomes}}$$

Example: the chances of rolling a "4" with a die

Number of ways it can happen: 1 (there is only 1 face with a "4" on it)

Total number of outcomes: 6 (there are 6 faces altogether)

$$\text{So the probability} = \frac{1}{6}$$

Example: there are 5 marbles in a bag: 4 are blue, and 1 is red. What is the probability that a blue marble gets picked?

Number of ways it can happen: 4 (there are 4 blues)

Total number of outcomes: 5 (there are 5 marbles in total)

$$\text{So the probability} = \frac{4}{5} = 0.8$$

What is a Probability Distribution?

A probability distribution is a table or an equation that links each outcome of a statistical experiment with its probability of occurrence.

Probability Distribution Prerequisites

To understand probability distributions, it is important to understand variables. random variables, and some notation.

A **variable** is a symbol (A, B, x, y, etc.) that can take on any of a specified set of values.

When the value of a variable is the outcome of a statistical experiment, that variable is a **random variable**.

Generally, statisticians use a capital letter to represent a random variable and a lower-case letter, to represent one of its values. For example,
X represents the random variable X.
P(X) represents the probability of X.
P(X = x) refers to the probability that the random variable X is equal to a particular value, denoted by x. As an example, P(X = 1) refers to the probability that the random variable X is equal to 1.

Uniform Probability Distribution:

The simplest probability distribution occurs when all of the values of a random variable occur with equal probability. This probability distribution is called the **uniform distribution**.

Uniform Distribution. Suppose the random variable X can assume k different values. Suppose also that the $P(X = x_k)$ is constant. Then,

$$P(X = x_k) = 1/k$$

Example 1

Suppose a die is tossed. What is the probability that the die will land on 5?

Solution: When a die is tossed, there are 6 possible outcomes represented by: $S = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6 \}$. Each possible outcome is a random variable (X), and each outcome is equally likely to occur. Thus, we have a uniform distribution. Therefore, the $P(X = 5) = 1/6$.

Example 2

Suppose we repeat the dice tossing experiment described in Example 1. This time, we ask what is the probability that the die will land on a number that is smaller than 5?

Solution: When a die is tossed, there are 6 possible outcomes represented by: $S = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6 \}$. Each possible outcome is equally likely to occur. Thus, we have a uniform distribution.

This problem involves a cumulative probability. The probability that the die will land on a number smaller than 5 is equal to:

$P(X < 5) = P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4)$

$P(X < 5) = 1/6 + 1/6 + 1/6 + 1/6 = 2/3$

الاسبوع الثامن والعشرون

Bayes theorem d نظرية بيز

إذا وقع الحدث E مع أحد الأحداث الشاملة $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ لفضاء عينة S و $P(E) > 0$ فإن:

$$P(A_k / E) = \frac{P(A_k)P(E / A_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(E / A_i)}, i = 1,2,3,\dots,n$$

والنظرية هي أحدى طرق الاستدلال الرياضي حيث يكون لدينا مجتمع أو ظاهرة تتبع توزيع احتمالي معين معتمداً على معلمة ثابتة مجهولة ونريد الحصول على تقدير فترة للمعلمة هذه أو نختبر فرضاً معيناً من خلال بيانات لعينة عشوائية مأخوذة من هذا المجتمع حيث لدينا معلومات احتمالية قبلية **Prior probability**(قبل اخذ العينة) عن هذه المعلمة التي تأخذ قيماً مختلفة لتصبح متغير عشوائي له توزيع احتمالي نحصل عليه باستخدام هذه النظرية، والتوزيع الاحتمالي الناتج بعد أخذ العينة ويعرف بالتوزيع ألبعدي (**(Posterior distribution)**وهو تلخيصاً للبيانات التي نحصل عليها من العينة بالإضافة للمعلومات القبلية مما يمكننا من تقدير هذه المعلمة المجهولة.

المثال التالي يوضح مفهوم هذه النظرية:

مثال ١ / في بحث على طلبة كلية الطب في السنة النهائية في مادة التشريح وجدَّ أنَّ ٢٠% من الطلبة والطالبات ممتازون وأنَّ ٧٠% متوسطون وأنَّ الباقون ضعاف ووجدَّ أنَّ نسبة الطالبات في هذه المجموعات الثلاث هي ٥٠%، ٦٠%، ٣٠% على الترتيب. فإذا اختير عشوائياً شخصاً من بينهم ووجدَّ أنه طالبة فاحسب احتمال أن تكون هذه الطالبة متوسطة في مادة التشريح.

الحل/ بفرض أن E حدث أن الشخص المختار عشوائياً طالبة (ممتازة) ، $k = 2$ فإنَّ:

$$P(A_k / E) = \frac{P(A_k)P(E / A_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(E / A_i)}, i = 1,2,3,\ldots,n$$

$$= \frac{0.70 \times 0.60}{0.20 \times 0.50 + 0.70 \times 0.60 + 0.10 \times 0.30}$$

$$= 0.7636$$

مثال (٢)

يوجد في مصنع ثلاث ماكينات تنتج الأولى ٤٥٠ وحدة يومياً والثانية ٣٥٠ وحدة يومياً والثالثة تنتج ٢٠٠ وحدة يومياً وكانت نسبة المعيب من إنتاج الماكينة الأولى ١% ومن الثانية ٢% ومن الثالثة ٣% . اختيرت من إنتاج المصنع وحدة عشوائياً فوجدت أنها معيبة فاحسب احتمال أن تكون الوحدة المختارة من الماكينة الثانية.

الحـل:

بفرض أن E حدث أن الوحدة المختارة عشوائياً معيبة ، 3 = k والوحدات المنتجة = 450 + 350 + 200 = 1000 وحدة

نسبة إنتاج الماكينة الأولى هي (450÷1000) = 0.45

نسبة إنتاج الماكينة الثانية هي (350÷1000) = 0.35

نسبة إنتاج الماكينة الثالثة هي (200÷1000) = 0.20 فإنَّ:

$$P(A_k / E) = \frac{P(A_k)P(E / A_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(E / A_i)}, i = 1,2,3,\dots,n$$

$$= \frac{0.35 \times 0.02}{0.45 \times 0.01 + 0.35 \times 0.02 + 0.20 \times 0.03}$$

نضرب الحدود في 10000

$$= \frac{70}{45 + 70 + 60}$$

$$= 0.4$$

مثال (٣)

إذا ثلاث صناديق تحتوي على مصابيح كهربائية، الصندوق الأول به i40مصباحاً من بينها مصباحان معيبان والصندوق الثاني به i60مصباحاً من بينها i6مصابيح معيبة والصندوق الثالث به i80مصباحاً من بينها i12مصابيح معيبة. اختير احد المصابيح عشوائياً. احسب احتمال أن يكون معيباً وإذا كان معيب فما احتمال أن يكون من الصندوق الثالث. (الجواب (i0.5لاحظ ناتج مقام القانون وهو احتمال المعيب من الصناديق الثلاثة يساوي i0.10

الحل:

احتمال اختيار صندوق من ثلاثة هو 1/3

احتمال المعيب من الصندوق الأول هو 2 / 40

احتمال المعيب من الصندوق الثاني هو 6 / 60

احتمال المعيب من الصندوق الثالث هو 12 / 80

بفرض أن E حدث أن المصباح المختار عشوائياً معيب ، $k = 3$ فإنَّ:

$$P(A_k / E) = \frac{P(A_k)P(E / A_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(E / A_i)}, i = 1,2,3,\ldots,n$$

$$= \frac{(1/3) \times (12/80)}{(1/3) \times (2/40) + (1/3) \times (6/60) + (1/3) \times (12/80)}$$

$$= \frac{0.05}{0.02 + 0.03 + 0.05}$$

$$= \frac{0.05}{0.10}$$

$$= 0.05$$

مثال (٤)

تقدم طلاب ثلاثة مدارس لامتحان مادة الإحصاء في السنة النهائية، وكان عدد المتقدمين من المدرسة الأولى 60%طالباً ومن الثانية 90%طالباً ومن الثالثة 100%طالباً
وكانت نسبة النجاح في المدرسة الأولى 70%وفي الثانية 60%وفي الثالثة 50%. فإذا اختير طالباً عشوائياً من بين هؤلاء الطلاب ووجد ناجحاً فما احتمال أن يكون من المدرسة الثانية. (الجواب 0.34) لاحظ ناتج مقام القانون وهو احتمال النجاح هو 0.71

الحل:

مجموع طلاب المدارس الثلاثة هو 250

احتمال الطالب من المدرسة الأولى هو 250/60

احتمال الطالب من المدرسة الثانية هو 250/90

احتمال الطالب من المدرسة الثالثة هو 250/100

بفرض أن E حدث أن الطالب المختار عشوائياً ناجحا ، $k = 3$ فإنّ:

$$P(A_k / E) = \frac{P(A_k)P(E / A_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(E / A_i)}, i = 1,2,3,\ldots,n$$

$$= \frac{(90/250) \times 0.60}{(60/250) \times 0.70 + (90/250) \times 0.60 + (100/250) \times 0.50}$$

$$= \frac{0.22}{0.17 + 0.22 + 0.20}$$

$$= \frac{0.22}{0.59}$$

$$= 0.37$$

مثال (٥)

تشكلت لجنة من 18 عضواً لتمثل الصفوف الأربعة في إحدى الكليات كالآتي:

3 أعضاء من الصف الأول منهم طالبة

5 أعضاء من الصف الثاني منهم طالبتان

6 أعضاء من الصف الثالث منهم ثلاثة طالبات

4 أعضاء من الصف الرابع منهم طالبتان

اختير عضواً من هذه اللجنة عشوائياً ووجدَّ أنه طالبة فما احتمال أن تكون هذه الطالبة من الصف الثالث؟ (الجواب 0.25)

الحل:

مجموع الأعضاء 18 فاحتمال اختيار عضو من الصف الأول هو 3/18 ومن الصف الثاني 5/18 ومن الثالث 6/18 ومن الرابع 4/18

بفرض أن E حدث أن المصباح المختار عشوائياً معيب ، $k = 4$ فإنَّ:

$$P(A_k / E) = \frac{P(A_k)P(E / A_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(E / A_i)}, i = 1,2,3,....,n$$

$$= \frac{(6/18) \times (3/6)}{(3/18) \times (1/3) + (5/18) \times (2/5) + (6/18) \times (3/6) + (4/18) \times (2/4)}$$

$$= \frac{0.17}{0.06 + 0.12 + 0.17 + 0.12}$$

$$= \frac{0.17}{0.47}$$

$$= 0.36$$

الاسبوع التاسع والعشرون والثلاثون

Some probability distributions : بعض التوزيعات الاحتمالية الشائعة

1- The Binomial Distribution: توزيع ذو الحدين

توزيع يختص بالتجارب العشوائية ذات الناتجين صح أو خطأ (فشل ونجاح) للمحاولات المستقلة المتكررة كرمي زهرة النرد فالنتيجة عدد أولي أو غير أولي ، زوجي أو فردي وهو ما يعرف بتجربة ذات الحدين التي تحقق الشروط الآتية:

1) كل محاولة تعطي نتيجة واحدة فقط نجاح أو فشل وهو ناتج ثابت.

2) واحتمال النجاح $(p+$احتمال الفشل $q=1$ ، $q = 1 - p$

3) المحاولات (عددها $(n$مستقلة فيما بينها.

يسمى التوزيع الاحتمالي Xبذي الحدين إذا كانت دالة احتماله بالصورة:

$$P(x) = {}^{n}C_{x}\, P^{x} (1 - P)^{n-x}$$

توزيع ذي الحدين من خصائصه: أن وسطه $= np$وتباينه $= npq$حيث pاحتمال النجاح ، qاحتمال الفشل ، الانحراف المعياري = الجذر ألتربيعي للتباين

مثال آخر:

في تجربة إلقاء حجر النرد 6 مرات، احسب احتمال ظهور العدد 5 في تلك المحاولات.

الحل:

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, P = 1/6, 1 - P = 5/6$$

$$P(x) = {}^{6}C_{x} (0.25)^{x} (0.75)^{6-x}, x = 0, 1, 2, ..., 10$$

$$P(0) = {}^{6}C_{0} (1/6)^{0} (5/6)^{6-0} = 1 \times 1 \times 0.33490 = 0.33490$$

$$P(1) = {}^{6}C_{1} (1/6)^{1} (5/6)^{6-1} = 6 \times (1/6) \times 0.40188 = 0.40188$$

ويمكن وضع النواتج في جدول كالآتي:

X	0	1	2	3	4	5	6	TOTAL
P(X)	0.33490	0.40188	0.20094	0.05358	0.00804	0.00064	0.00002	1

احتمال ظهور العدد 5 = 0.00064 أي $P(5) = 0.00064$

2- Poisson Distribution: توزيع بواسون

$$P(x) = \frac{\mu^x e^{-\mu}}{x!} \quad , \; x = 0, 1, 2, 3, ..., \infty \quad , \; e = 2.71828 \quad , \; \mu = np$$

مثال:

معدل عدد الحوادث على الطريق العام 7 مرات في الأسبوع، فما احتمال عدم وقوع حادث في أسبوع معين على نفس الطريق.

الحل:

P(0) الاحتمال المطلوب

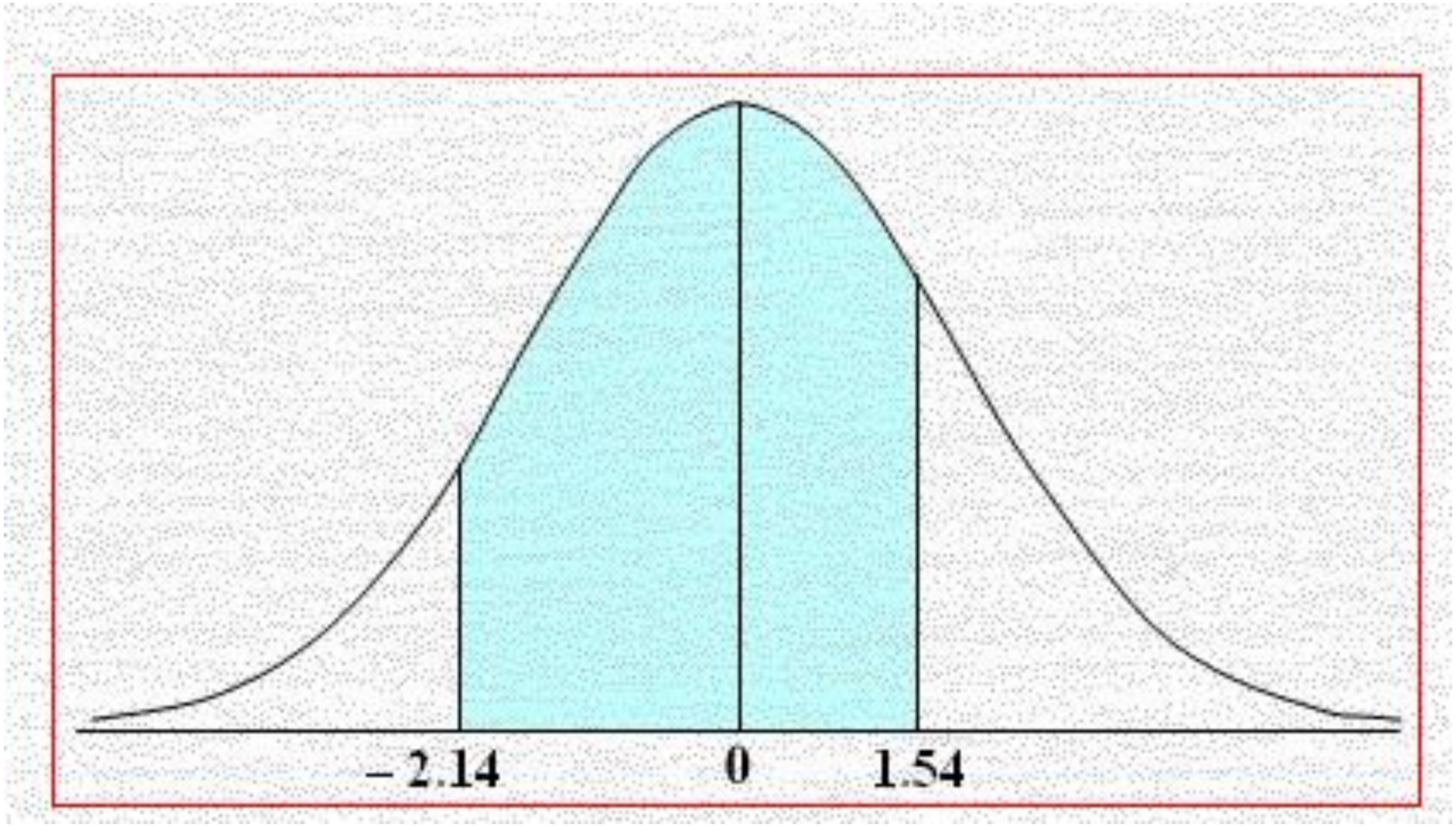
$$P(x) = \frac{7^0 e^{-7}}{0!} = \frac{1 \times e^{-7}}{1} = e^{-7} = 0.00091$$

يمكن تكوين جدول لكل النتائج كالآتي:

X	0	1	2	3	4	5	6	7	......	TOTAL
P(X)	0.00091	0.00638	0.02234	0.05213	0.09122	0.12771	0.14900	0.14900	......	1

مثال(١):

احسب المساحة المحصورة بين 1.54 , 2.14 –والواقعة تحت منحنى التوزيع الطبيعي والمبينة بالشكل المرفق.



الحل:

نعلم أن العدد 1.54 يقابله في جدول Z قيمة المساحة الواقعة يساره وكذلك العدد 2.14 – تقابله مساحة في جدول Z والفرق بين المساحتين يعطينا المساحة المطلوبة.

مع ملاحظة حسابنا للقيمة السالبة بموجبها مطروح من الواحد الصحيح.

العدد	المساحة
1.54	0.9382
– 2.14	1 – 0.9838 = 0.0162

المساحة المطلوبة = 0.0162 – 0.9382

= 0.9220

أو بجمع القيم الجدولية للقيمتين مباشرة بحذف 0.5000 من قيمها الجدولية أي (0.5000 – 0.9382) , (0.5000 – 0.9838)

المساحة المطلوبة = 0.4838 + 0.4382

= 0.9220

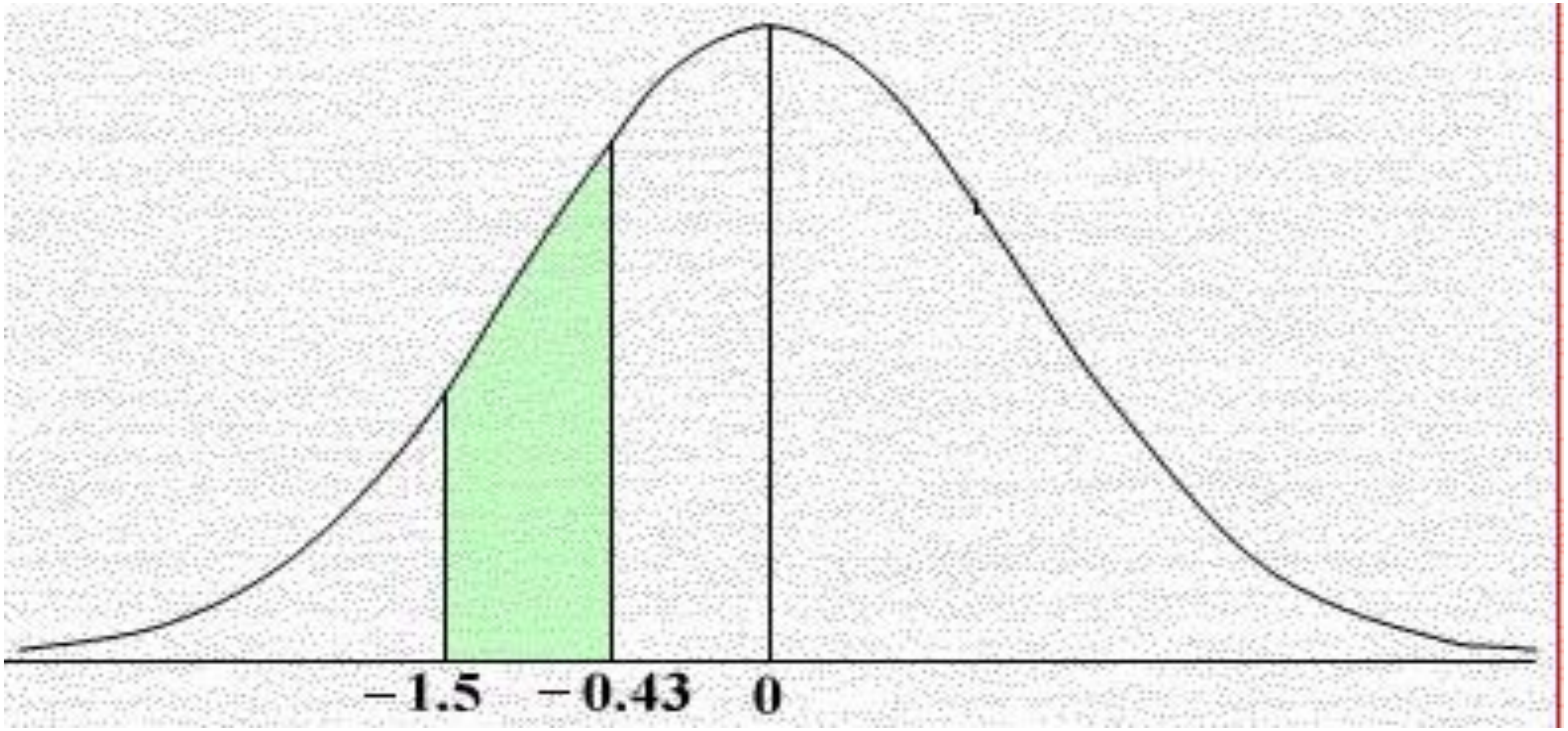
تنويه: جدول z يقرأ المساحة على يسار العدد وعليه نقول

المساحة على يمين العدد 1.54 = 1 – 0.9832 = 0.0168

المساحة على يمين العدد صفر هي 0.5

مثال(2):

احسب المساحة بين $Z = -0.43$, $Z = -1.5$



الحل:

المساحة المطلوبة = المساحة على يسار ‎-0.43‎ مطروحاً منها المساحة على يسار ‎-1.5‎

$(0.9332 - 1) - (0.6664 - 1) =$

$0.0668 - 0.3336 =$

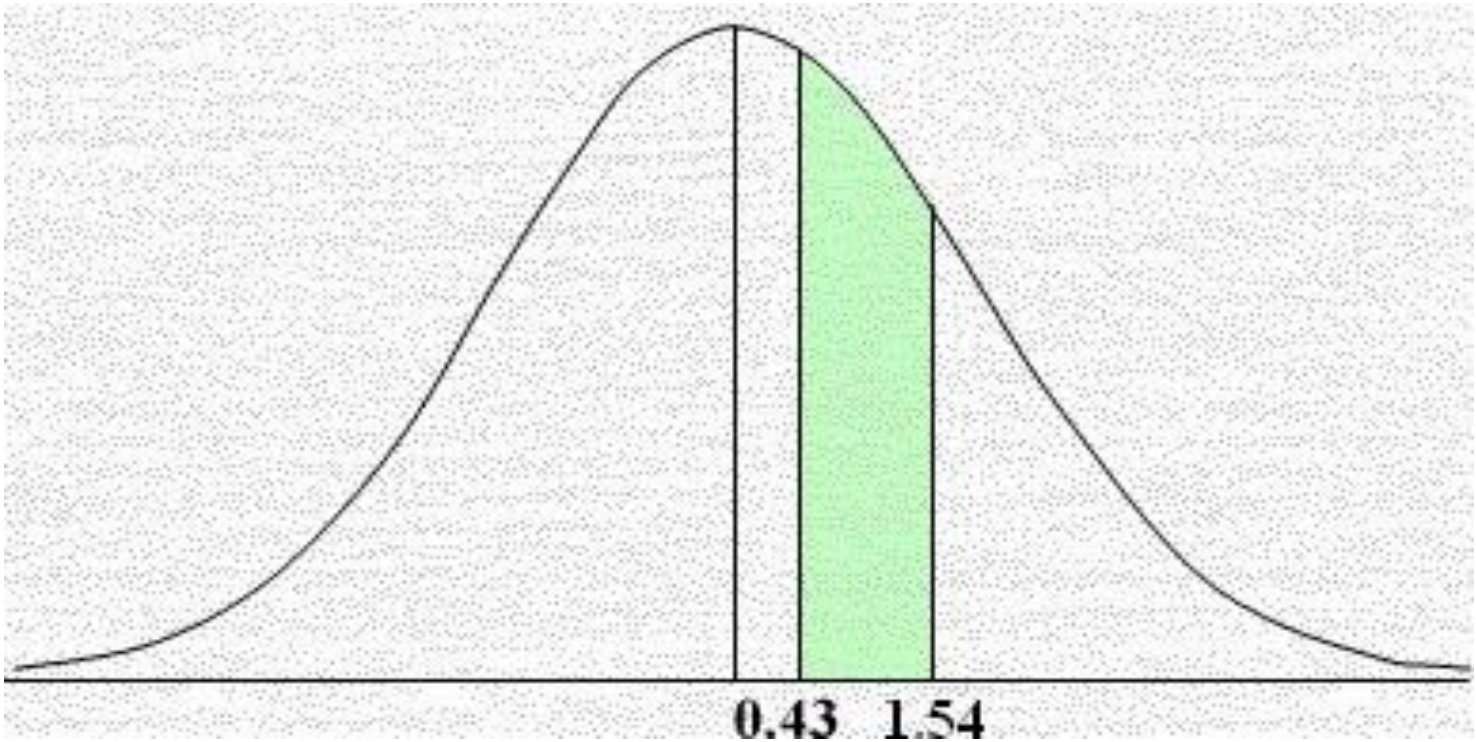
$0.2668 =$

أو

$$P(-0.43 > Z > -1.5) = [1 - P(Z < 0.43)] - [1 - P(Z < 1.5)]$$
$$= (1 - 0.6664) - (1 - 0.9332)$$
$$= 0.3336 - 0.0668$$

مثال(3):

احسب المساحة بين $Z = 0.43$, $Z = 1.5$



الحل:

المساحة المطلوبة = المساحة على يسار1.5 مطروحاً منها المساحة على يسار0.43

$= 0.9332 - 0.6664$

$= 0.2668$

أو

$$P(0.43 < Z < 1.5) = P(Z < 1.5) - P(Z < 0.43)$$
$$= 0.9332 - 0.6664$$
$$= 0.2668$$

References: المصادر

١- الدكتور حامد سعد نور الشمرتي، بحوث العمليات " مفهوما وتطبيقا"، ٢٠١٠ .

٢- Operations Research The foundations of basic scientific and decisions بحوث العمليات مرتكزات اساسية وقرارات علمية

تاليف أ.م.د.عبد الجبار خضر بخيت واخرون، بغداد، ٢٠١٥ .

تم اعداد هذه المواضيع وفقا للمفردات المنهجية لمادة الاساليب الكمية لقسم تقنيات المحاسبة

اتمنى ان تكون ذات فائدة علمية للجميع

م.م. عماد فرهود محي الشريفي
ماجستير علوم رياضيات
الكلية التقنية/ ذي قار